[東京工業大学 2011 年前期 $\boxed{1}$]

n を自然数とする。xy 平面上で行列 $\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換（移動ともいう）を f_n とする。次の問に答えよ。

(1) 原点 O(0, 0) を通る直線で，その直線上のすべての点が f_n により同じ直線上に移されるものが 2 本あることを示し，この 2 直線の方程式を求めよ。

(2) (1)で得られた 2 直線と曲線 $y=x^2$ によって囲まれる図形の面積 S_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n-\frac{1}{6}}$ を求めよ。

(1) 求める直線上の点を $(x,\ y)$ とおく。

題意の条件より $\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる。

$\begin{pmatrix} (1-n)x+y \\ -n(n+1)x+(n+2)y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より

$$\{(1-n)x+y\}y-\{-n(n+1)x+(n+2)y\}x=0$$

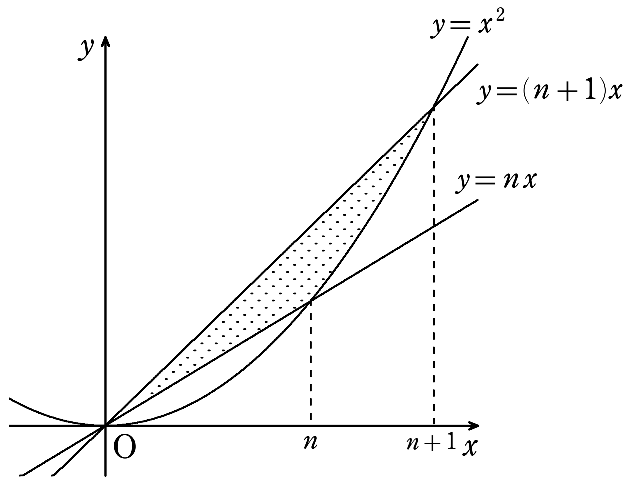
$$n(n+1)x^2-(2n+1)xy+y^2=0$$

$$(y-nx)\{y-(n+1)x\}=0$$

よって $y=nx$ または $y=(n+1)x$

したがって，求める直線は 2 本あり，その方程式は $y=nx,\ y=(n+1)x$

(2) 右図の網目部分の面積が S_n である。



よって $S_n=\int_0^{n+1}\{(n+1)x-x^2\}\,dx-\int_0^{n}(nx-x^2)\,dx$

$$=-\int_0^{n+1}x\{x-(n+1)\}\,dx+\int_0^{n}x(x-n)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)^3-\frac{1}{6}n^3$$

$$=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{6}$$

(3) $\dfrac{1}{S_n-\dfrac{1}{6}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}n(n+1)}$

$=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k-\dfrac{1}{6}}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n-\dfrac{1}{6}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k-\dfrac{1}{6}}=2\cdot1=2$

[東京工業大学 2011 年前期 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

実数 x に対して $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t - x\sin 2t|\,dt$ とおく。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t - x\sin 2t|\,dt$ において $g(t)=\cos t - x\sin 2t$ とおく。

$g(t)=\cos t-2x\sin t\cos t=(1-2x\sin t)\cos t$ であり，$g(t)$ の原始関数の 1 つを $G(t)$ とすると，

$G(t)=\sin t - x\sin^2 t$ である。$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから $0 \leqq \sin t \leqq 1$ であり，

(i) $2x \leqq 1$，すなわち $x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき $g(t) \geqq 0$ であるから

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,dt$$

$$=\Big[\sin t - x\sin^2 t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1-x$$

(ii) $2x \geqq 1$，すなわち $x \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ において $g(t)=0$ となる t がただ 1 つ存在し，

その t を α とする。

$\sin\alpha=\dfrac{1}{2x}$ であり，$0 \leqq t \leqq \alpha$ のとき $g(t) \geqq 0$，$\alpha \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $g(t) \leqq 0$ であるから

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\,g(t)\,|\,dt$$

$$=\int_0^{\alpha} g(t)\,dt+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\{-g(t)\}\,dt$$

$$=\Big[G(t)\Big]_0^{\alpha}-\Big[G(t)\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2G(\alpha)-G(0)-G\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2(\sin\alpha - x\sin^2\alpha)-(1-x)=2\left(\frac{1}{2x}-x\cdot\frac{1}{4x^2}\right)-(1-x)$$

$$=x+\frac{1}{2x}-1$$ となる。

$x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$f(x)$ は減少関数であるので，最小値をとるのは $x \geqq \dfrac{1}{2}$ においてである。

ここで，相加相乗平均の関係式より $x+\dfrac{1}{2x}-1 \geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{2x}}-1=\sqrt{2}-1$ が成り立つ。

ただし，等号成立は $x=\dfrac{1}{2x}$ より $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。

よって求める最小値は $\sqrt{2}-1$

(2) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)dt$

$$=\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\log|x|-x\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{2}-1\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

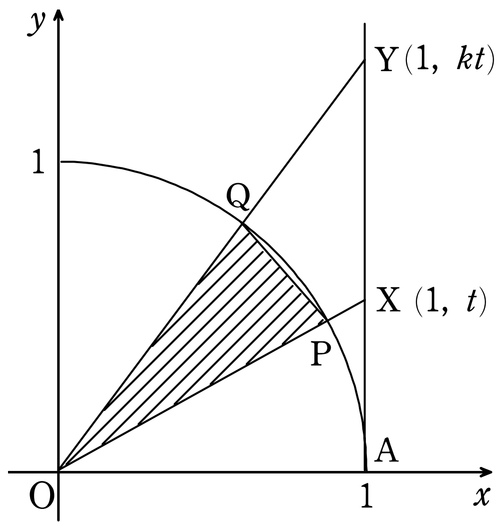
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log 2$$

[東京工業大学 2011 年前期 $\boxed{3}$]

☆

定数kは$k>1$をみたすとする。xy平面上の点A(1, 0)を通りx軸に垂直な直線の第 1 象限に含まれる部分を，2 点X, YがAY$=k$AXをみたしながら動いている。原点O(0, 0)を中心とする半径 1 の円と線分OX, OYが交わる点をそれぞれP, Qとするとき，△OPQの面積の最大値をkを用いて表せ。

☆



X$(1, t)$ とおくと， AY$=k$AX より Y$(1, kt)$ とおける。

直線OX : $y=tx$ …①，直線OY : $y=ktx$ である。

第 1 象限内の原点O(0, 0)を中心とする半径 1 の円は，

$y=\sqrt{1-x^2}$ …②であるから，①と②を連立して

P の座標を求めると $\sqrt{1-x^2}=tx$ かつ $x>0$ から

$x=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ となり，したがって $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)$

である。同様にして $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k^2t^2+1}}, \dfrac{kt}{\sqrt{k^2t^2+1}}\right)$ もわかる。

よって，△OPQの面積をSとおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{kt}{\sqrt{k^2t^2+1}}-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k^2t^2+1}}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(k-1)t}{\sqrt{k^2t^4+(k^2+1)t^2+1}}\quad(\because\ k>1,\ \ t>0)$$

$$=\frac{k-1}{2}\sqrt{\frac{t^2}{k^2t^4+(k^2+1)t^2+1}}$$

$$=\frac{k-1}{2}\sqrt{\frac{1}{k^2t^2+\dfrac{1}{t^2}+k^2+1}}\quad\cdots③$$

となる。

ここで，$f(t)=k^2t^2+\dfrac{1}{t^2}+k^2+1$ とおく。

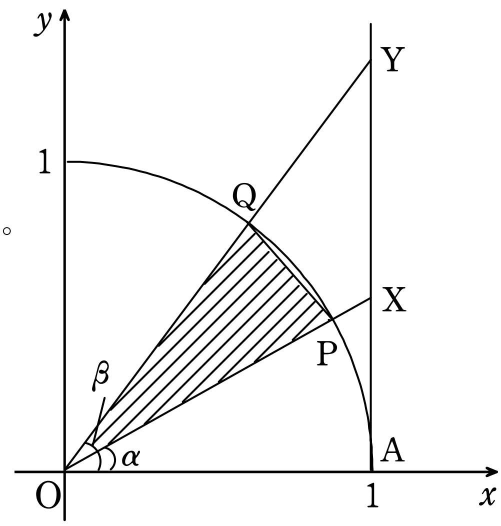
相加平均・相乗平均の関係式より $f(t)≧2\sqrt{k^2t^2\cdot\dfrac{1}{t^2}}+k^2+1=2k+k^2+1=(k+1)^2$

ただし，等号成立は $k^2t^2=\dfrac{1}{t^2}$ より $t=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ のとき。

$f(t)$ が最小になるとき，③すなわち S は最大になる。

よって $S=\dfrac{k-1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{f(t)}}≦\dfrac{k-1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{(k+1)^2}}=\dfrac{k-1}{2(k+1)}$

であるから，求める S の最大値は $\dfrac{k-1}{2(k+1)}$



[別解]

$\angle\mathrm{AOX}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOY}=\beta$ とおく。

$k>1$ より $\mathrm{AY}=k\mathrm{AX}>\mathrm{AX}$ であり，$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ である。

△OPQの面積を S とおくと，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cdot\sin\angle\mathrm{POQ}\\&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin(\beta-\alpha)\\&=\frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)\quad\cdots①\end{aligned}$$

$\mathrm{AX}=\mathrm{OA}\tan\angle\mathrm{AOX}=\tan\alpha$，$\mathrm{AY}=\mathrm{OA}\tan\angle\mathrm{AOY}=\tan\beta$ であるから，

$\mathrm{AY}=k\mathrm{AX}$ より $\tan\beta=k\tan\alpha$ となるので tan の加法定理から

$$\begin{aligned}\tan(\beta-\alpha)&=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{k\tan\alpha-\tan\alpha}{1+k\tan^2\alpha}\\&=\frac{(k-1)\tan\alpha}{1+k\tan^2\alpha}\\&=\frac{(k-1)}{\dfrac{1}{\tan\alpha}+k\tan\alpha}\quad\cdots②\end{aligned}$$

となる。

$\tan\alpha > 0$, $k > 1$であるから，相加平均・相乗平均の関係式より

$$\frac{1}{\tan\alpha} + k\tan\alpha \geqq 2\sqrt{\frac{1}{\tan\alpha} + k\tan\alpha} = 2\sqrt{k}$$

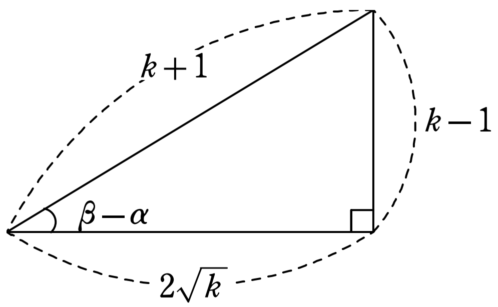
ただし，等号成立は $\dfrac{1}{\tan\alpha} = k\tan\alpha$ すなわち $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ のとき。

よって，②より $\tan(\beta-\alpha) \leqq \dfrac{k-1}{2\sqrt{k}}$ …③

$0 < \beta-\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であり，$\tan(\beta-\alpha)$ と $\sin(\beta-\alpha)$ はともにこの範囲で単調増加である。

$\beta-\alpha$ が最大になるとき $\sin(\beta-\alpha)$ と $\tan(\beta-\alpha)$ はともに最大となるので, このとき面積 S も最大となる。

$\tan(\beta-\alpha) = \dfrac{k-1}{2\sqrt{k}}$ のとき $\sin(\beta-\alpha) = \dfrac{k-1}{k+1}$ である。



よって，S は $\mathrm{AX} = \tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ のとき最大値 $\dfrac{k-1}{2(k+1)}$ をとる。

（注）[別解]は最後まで角度を主体にして押し切っているが， $\mathrm{AX} = t$ として t の関数にしてもよい。

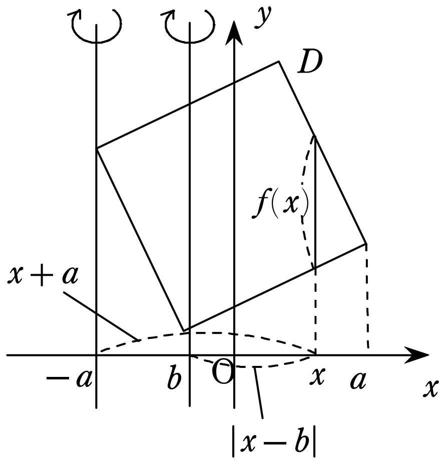
そうすると最初の解答と後半はほぼ同じになる。

[東京工業大学 2011 年前期 $\boxed{4}$]

平面上に一辺の長さが 1 の正方形 D および D と交わる直線があるとする。この直線を軸に D を回転して得られる回転体について以下の問に答えよ。

(1) D と同じ平面上の直線 ℓ は D のどの辺にも平行でないものとする。軸とする直線は ℓ と平行なものの中で考えるとき，回転体の体積を最大にする直線は D と唯 1 点で交わることを示せ。

(2) D と交わる直線を軸としてできるすべての回転体の体積の中で最大となる値を求めよ。



(1) y 軸が D の中心を通り ℓ と平行であるように xy 座標軸をとる。

直線 $x=$一定 が D と交わる範囲を $-a \leqq x \leqq a$ とし，

D との交わりの長さを $f(x)$ とすると，

$f(x) \geqq 0$ であり， $f(x)$ は偶関数である。

回転軸が直線 $x=b$ のときの回転体の体積を $V(b)$ とすると，

$V(b)$ は偶関数であるから

$-a<b \leqq 0$ のとき，$V(b)<V(-a)$ …① が成り立つことを示せばよい。

まず，$f(x)$ が偶関数，$x\,f(x)$ が奇関数であることを用いると

$$V(-a)=\int_{-a}^{a}2\pi(x+a)\,f(x)\,dx$$

$$=2\pi\int_{-a}^{a}\{x\,f(x)+a\,f(x)\}\,dx$$

$$=4\pi a\int_{0}^{a}f(x)\,dx \quad \cdots② \text{ である。}$$

次に，$-a<b \leqq 0$ のとき，$V(b)$ よりも D のうち $x=b$ の左側にある部分，右側にある部分を $x=b$ を軸に回転して得られる回転体の体積の和の方が大きく，

$$V(b)<\int_{-a}^{a}2\pi\,|\,x-b\,|\,f(x)\,dx \quad \cdots③$$

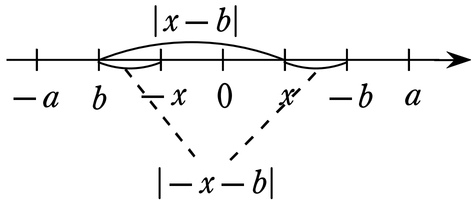
となるから，「③の右辺 $\leqq$ ②」を示せば，①が証明されたことになる。

一般に，$\displaystyle\int_{-a}^{a}g(x)\,dx=\int_{-a}^{0}g(x)\,dx+\int_{0}^{a}g(x)\,dx$ であり，

右辺第 1 項は，$x=-t$ とおくことにより

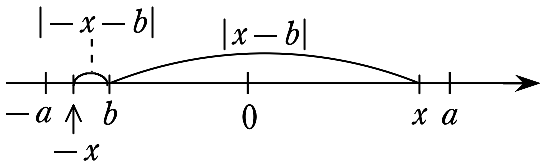
$$\int_{-a}^{0} g(x)\,dx = \int_{a}^{0} g(-t)\cdot(-1)\,dt = \int_{0}^{a} g(-t)\,dt = \int_{0}^{a} g(-x)\,dx$$

となるから



$$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = \int_{0}^{a} g(-x)\,dx + \int_{0}^{a} g(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} \{g(x) + g(-x)\}\,dx$$ が成り立つ。



よって，③の右辺は $f(-x) = f(x)$ を適用すると

$2\pi \int_{0}^{a} \left(|x-b| + |-x-b|\right) f(x)\,dx$ …④ に等しい。

ここで，$|x-b| + |-x-b|$ …⑤ が数直線上で 2 点 x, b 間の距離と

2 点 $-x$, b 間の距離の和であることに注意すると，

$0 \leqq x \leqq a$ において「⑤ $\leqq 2a$ 」が成り立つことがわかるから，

$f(x) \geqq 0$ に注意すると「④ $\leqq 2\pi \int_{0}^{a} 2a\, f(x)\,dx =$ ②」となる。

よって題意は示された。

(2) D の辺が x 軸，y 軸と平行な場合も(1)の議論が成り立つので，a の値が変化するとき，②の最大値を求めればよい。

$\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ は，D のうち，$x \geqq 0$ の範囲にある部分の面積 $\dfrac{1}{2}$ に等しいから，② $= 2\pi a$ であり，D の中心と頂点の距離は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，a の最大値は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。

よって，求める体積の最大値は $2\pi \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi$

[注]

区間 $[a,\ b]$ $(0 \leqq a < b)$ で定義された連続関数 $f(x)$ が，この区間で常に $f(x) \geqq 0$ であるとする。曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分を y 軸に回転して得られる回転体の体積 V は $V = \int_{a}^{b} 2\pi x\, f(x)\,dx$ で得られる。

この体積の公式は「バウムクーヘン法」などと呼ばれていて発展事項と思われるが，解答ではこれを使用している。英語では「cylindrical shell volume formula」と言い，体積の公式としては一般的らしい。