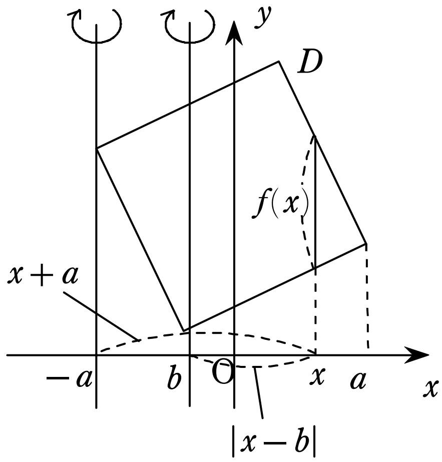
[東京工業大学 2011 年前期 $\boxed{4}$]

平面上に一辺の長さが 1 の正方形 D および D と交わる直線があるとする。この直線を軸に D を回転して得られる回転体について以下の問に答えよ。

(1) D と同じ平面上の直線 ℓ は D のどの辺にも平行でないものとする。軸とする直線は ℓ と平行なものの中で考えるとき，回転体の体積を最大にする直線は D と唯 1 点で交わることを示せ。

(2) D と交わる直線を軸としてできるすべての回転体の体積の中で最大となる値を求めよ。



(1) y 軸が D の中心を通り ℓ と平行であるように xy 座標軸をとる。

直線 $x=$一定 が D と交わる範囲を $-a \leqq x \leqq a$ とし，

D との交わりの長さを $f(x)$ とすると，

$f(x) \geqq 0$ であり， $f(x)$ は偶関数である。

回転軸が直線 $x=b$ のときの回転体の体積を $V(b)$ とすると，

$V(b)$ は偶関数であるから

$-a < b \leqq 0$ のとき，$V(b) < V(-a)$ …① が成り立つことを示せばよい。

まず， $f(x)$ が偶関数， $x\,f(x)$ が奇関数であることを用いると

$$V(-a) = \int_{-a}^{a} 2\pi(x+a)\,f(x)\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a} \{x\,f(x) + a\,f(x)\}\,dx$$

$$= 4\pi a\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{…②}$$ である。

次に，$-a < b \leqq 0$ のとき，$V(b)$ よりも D のうち $x=b$ の左側にある部分，右側にある部分を $x=b$ を軸に回転して得られる回転体の体積の和の方が大きく，

$$V(b) < \int_{-a}^{a} 2\pi\,|\,x-b\,|\,f(x)\,dx \quad \text{…③}$$

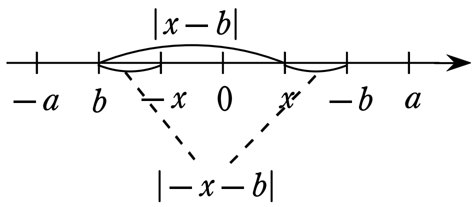
となるから，「③の右辺 $\leqq$ ②」を示せば，①が証明されたことになる。

一般に，$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = \int_{-a}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{a} g(x)\,dx$ であり，

右辺第 1 項は， $x=-t$ とおくことにより

$$\int_{-a}^{0} g(x)\,dx = \int_{a}^{0} g(-t)\cdot(-1)\,dt = \int_{0}^{a} g(-t)\,dt = \int_{0}^{a} g(-x)\,dx$$

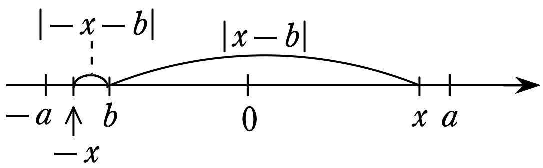
となるから



$$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = \int_{0}^{a} g(-x)\,dx + \int_{0}^{a} g(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} \{g(x)+g(-x)\}\,dx$$ が成り立つ。

よって，③の右辺は $f(-x)=f(x)$ を適用すると



$2\pi\int_{0}^{a}\left(|x-b|+|-x-b|\right)f(x)\,dx$ …④ に等しい。

ここで，$|x-b|+|-x-b|$ …⑤ が数直線上で 2 点 $x,\ b$ 間の距離と 2 点 $-x,\ b$ 間の距離の和であることに注意すると，

$0 \leqq x \leqq a$ において「⑤ $\leqq 2a$」が成り立つことがわかるから，

$f(x) \geqq 0$ に注意すると「④ $\leqq 2\pi\int_{0}^{a} 2a\,f(x)\,dx =$ ②」となる。

よって題意は示された。

(2) D の辺が x 軸，y 軸と平行な場合も(1)の議論が成り立つので，a の値が変化するとき，②の最大値を求めればよい。

$\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ は，D のうち，$x \geqq 0$ の範囲にある部分の面積 $\dfrac{1}{2}$ に等しいから，② $=2\pi a$ であり，D の中心と頂点の距離は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，a の最大値は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。

よって，求める体積の最大値は $2\pi\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\pi$

[注]

区間 $[a,\ b]$ $(0 \leqq a < b)$ で定義された連続関数 $f(x)$ が，この区間で常に $f(x) \geqq 0$ であるとする。曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれた部分を y 軸に回転して得られる回転体の体積 V は $V=\int_{a}^{b} 2\pi x\,f(x)\,dx$ で得られる。

この体積の公式は「バウムクーヘン法」などと呼ばれていて発展事項と思われるが，解答ではこれを使用している。英語では「cylindrical shell volume formula」と言い，体積の公式としては一般的らしい。