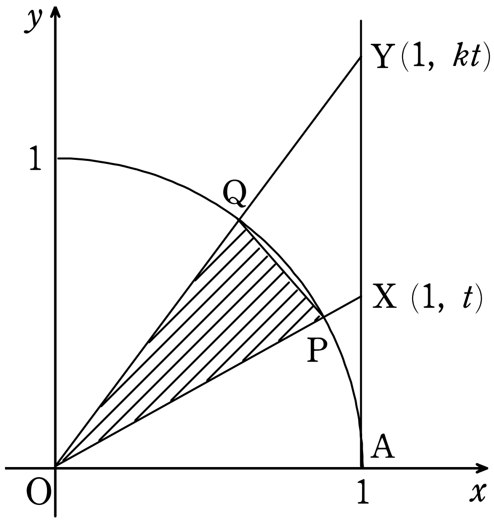
[東京工業大学 2011 年前期 $\boxed{3}$]

定数kは$k>1$をみたすとする。xy平面上の点A(1, 0)を通りx軸に垂直な直線の第 1 象限に含まれる部分を，2 点X, YがAY = kAXをみたしながら動いている。原点O(0, 0)を中心とする半径 1 の円と線分OX, OYが交わる点をそれぞれP, Qとするとき，△OPQの面積の最大値をkを用いて表せ。



X(1, t) とおくと，AY = kAX より Y(1, kt) とおける。

直線OX : $y=tx$ …①，直線OY : $y=ktx$ である。

第 1 象限内の原点O(0, 0)を中心とする半径 1 の円は，

$y=\sqrt{1-x^2}$ …②であるから，①と②を連立して

P の座標を求めると $\sqrt{1-x^2}=tx$ かつ $x>0$ から

$x=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ となり，したがって $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}},\ \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)$

である。同様にして $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k^2t^2+1}},\ \dfrac{kt}{\sqrt{k^2t^2+1}}\right)$ もわかる。

よって，△OPQの面積をSとおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{kt}{\sqrt{k^2t^2+1}}-\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k^2t^2+1}}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(k-1)t}{\sqrt{k^2t^4+(k^2+1)t^2+1}}\quad(\because\ k>1,\ \ t>0)$$

$$=\frac{k-1}{2}\sqrt{\frac{t^2}{k^2t^4+(k^2+1)t^2+1}}$$

$$=\frac{k-1}{2}\sqrt{\frac{1}{k^2t^2+\dfrac{1}{t^2}+k^2+1}}\quad\cdots③$$

となる。

ここで，$f(t)=k^2t^2+\dfrac{1}{t^2}+k^2+1$ とおく。

相加平均・相乗平均の関係式より $f(t) \geqq 2\sqrt{k^2t^2\cdot\dfrac{1}{t^2}}+k^2+1=2k+k^2+1=(k+1)^2$

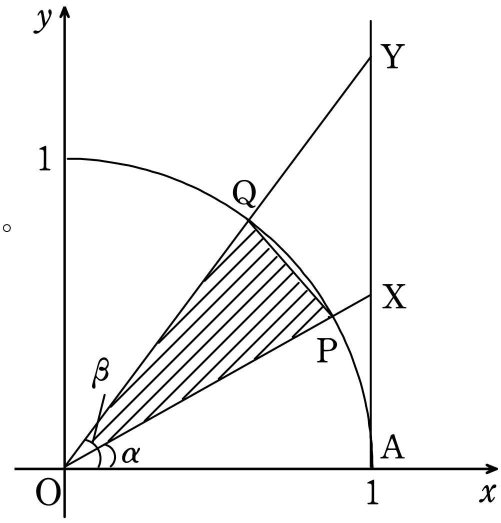
ただし，等号成立は $k^2t^2=\dfrac{1}{t^2}$ より $t=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ のとき。

$f(t)$ が最小になるとき，③すなわち S は最大になる。

よって $S=\dfrac{k-1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{f(t)}} \leqq \dfrac{k-1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{(k+1)^2}}=\dfrac{k-1}{2(k+1)}$

であるから，求める S の最大値は $\dfrac{k-1}{2(k+1)}$

[別解]



$\angle\mathrm{AOX}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOY}=\beta$ とおく。

$k>1$ より $\mathrm{AY}=k\mathrm{AX}>\mathrm{AX}$ であり，$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ である。

$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cdot\sin\angle\mathrm{POQ}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin(\beta-\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha) \quad \cdots①$$

$\mathrm{AX}=\mathrm{OA}\tan\angle\mathrm{AOX}=\tan\alpha$， $\mathrm{AY}=\mathrm{OA}\tan\angle\mathrm{AOY}=\tan\beta$ であるから，

$\mathrm{AY}=k\mathrm{AX}$ より $\tan\beta=k\tan\alpha$ となるので tan の加法定理から

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{k\tan\alpha-\tan\alpha}{1+k\tan^2\alpha}$$
$$=\frac{(k-1)\tan\alpha}{1+k\tan^2\alpha}$$
$$=\frac{(k-1)}{\dfrac{1}{\tan\alpha}+k\tan\alpha} \quad \cdots② \text{ となる。}$$

$\tan\alpha>0$，$k>1$であるから，相加平均・相乗平均の関係式より

$$\frac{1}{\tan\alpha}+k\tan\alpha \geqq 2\sqrt{\frac{1}{\tan\alpha}+k\tan\alpha}=2\sqrt{k}$$

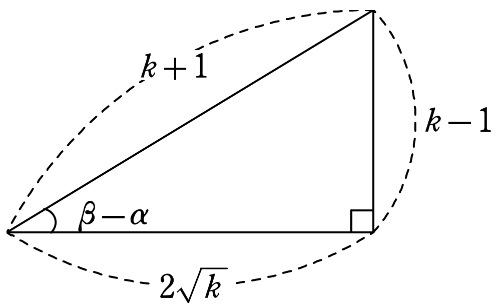
ただし，等号成立は $\dfrac{1}{\tan\alpha}=k\tan\alpha$ すなわち $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ のとき。

よって，②より $\tan(\beta-\alpha)\leqq\dfrac{k-1}{2\sqrt{k}}$ …③

$0<\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であり，$\tan(\beta-\alpha)$ と $\sin(\beta-\alpha)$ はともにこの範囲で単調増加である。

$\beta-\alpha$ が最大になるとき $\sin(\beta-\alpha)$ と $\tan(\beta-\alpha)$ はともに最大となるので, このとき面積 S も最大となる。

$\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{k-1}{2\sqrt{k}}$ のとき $\sin(\beta-\alpha)=\dfrac{k-1}{k+1}$ である。



よって，S は $\mathrm{AX}=\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ のとき最大値 $\dfrac{k-1}{2(k+1)}$ をとる。

（注）[別解]は最後まで角度を主体にして押し切っているが，$\mathrm{AX}=t$ として t の関数にしてもよい。

そうすると最初の解答と後半はほぼ同じになる。