[東京工業大学 2011 年前期 $\boxed{2}$]

実数 x に対して　$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t-x\sin 2t|\,dt$　とおく。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ。

---

(1)　$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t-x\sin 2t|\,dt$　において　$g(t)=\cos t-x\sin 2t$　とおく。

$g(t)=\cos t-2x\sin t\cos t=(1-2x\sin t)\cos t$　であり，$g(t)$ の原始関数の 1 つを $G(t)$ とすると，

$G(t)=\sin t-x\sin^2 t$　である。$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$　であるから　$0\leqq\sin t\leqq 1$　であり，

(i)　$2x\leqq 1$，すなわち $x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき　$g(t)\geqq 0$ であるから

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\,dt$$

$$=\Big[\sin t-x\sin^2 t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1-x$$

(ii)　$2x\geqq 1$，すなわち $x\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき　$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ において $g(t)=0$ となる t がただ 1 つ存在し，

その t を α とする。

$\sin\alpha=\dfrac{1}{2x}$ であり，$0\leqq t\leqq\alpha$　のとき　$g(t)\geqq 0$，$\alpha\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$g(t)\leqq 0$　であるから

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\,g(t)\,|\,dt$$

$$=\int_0^{\alpha}g(t)\,dt+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\{-g(t)\}\,dt$$

$$=\Big[G(t)\Big]_0^{\alpha}-\Big[G(t)\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2G(\alpha)-G(0)-G\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2(\sin\alpha-x\sin^2\alpha)-(1-x)=2\left(\frac{1}{2x}-x\cdot\frac{1}{4x^2}\right)-(1-x)$$

$$=x+\frac{1}{2x}-1$$　となる。

$x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき， $f(x)$ は減少関数であるので，最小値をとるのは $x \geqq \dfrac{1}{2}$ においてである。

ここで，相加相乗平均の関係式より $x+\dfrac{1}{2x}-1 \geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{2x}}-1=\sqrt{2}-1$ が成り立つ。

ただし，等号成立は $x=\dfrac{1}{2x}$ より $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。

よって求める最小値は $\sqrt{2}-1$

(2) $\displaystyle \int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)dt$

$$=\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\log|x|-x\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{2}-1\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log 2$$