[東京工業大学 2011 年前期 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

n を自然数とする。xy 平面上で行列 $\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換（移動ともいう）を f_n とする。次の問に答えよ。

(1) 原点 O(0, 0) を通る直線で，その直線上のすべての点が f_n により同じ直線上に移されるものが 2 本あることを示し，この 2 直線の方程式を求めよ。

(2) (1)で得られた 2 直線と曲線 $y=x^2$ によって囲まれる図形の面積 S_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n-\frac{1}{6}}$ を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 求める直線上の点を $(x,\ y)$ とおく。

題意の条件より $\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる。

$\begin{pmatrix} (1-n)x+y \\ -n(n+1)x+(n+2)y \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より

$$\{(1-n)x+y\}y-\{-n(n+1)x+(n+2)y\}x=0$$

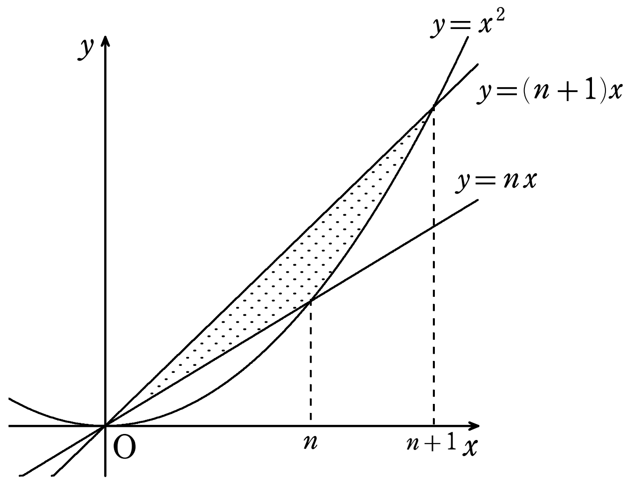
$$n(n+1)x^2-(2n+1)xy+y^2=0$$

$$(y-nx)\{y-(n+1)x\}=0$$

よって　$y=nx$　または　$y=(n+1)x$

したがって，求める直線は 2 本あり，その方程式は　$y=nx,\ y=(n+1)x$

(2) 右図の網目部分の面積が S_n である。



よって　$S_n=\int_0^{n+1}\{(n+1)x-x^2\}\,dx-\int_0^{n}(nx-x^2)\,dx$

$$=-\int_0^{n+1}x\{x-(n+1)\}\,dx+\int_0^{n}x(x-n)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)^3-\frac{1}{6}n^3$$

$$=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{6}$$

(3) $\dfrac{1}{S_n-\dfrac{1}{6}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}n(n+1)}$

$=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k-\dfrac{1}{6}}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n-\dfrac{1}{6}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k-\dfrac{1}{6}}=2\cdot1=2$