**[ 東京工業大学 2010 年 第 1 類特別入試 $\boxed{1}$ ]**

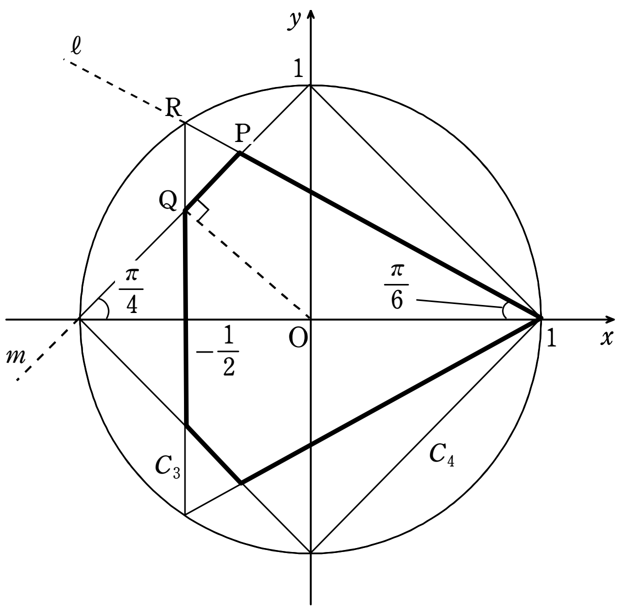
この試験は現時点での諸君の論理的理解力の習熟度を測るためのものであり，あまりに乱暴な字ではその役に立ちません。できるだけ丁寧な字で，採点員が論理を追い易いように各自工夫し，結論ははっきりと記述してください。

$xy$ 平面の $n$ 個の点 $\left(\cos\dfrac{2k\pi}{n}, \sin\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ を頂点とする正 $n$ 角形の周および内部を $D_n$ とする。このとき，$D_3, D_4, D_5, D_6, \cdots$ の共通部分の面積を求めよ。

---

$D_n$ の周を $C_n$ とする。

図 1




（ｉ）$x \leqq 0$ のとき

$C_3$ と $C_4$ の交点と原点の距離を考える。

対称性より図 1 の P, Q について考えればよい。

$\ell : y = -\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}$，$m : y = x+1$ を連立して

$-x+1 = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ より

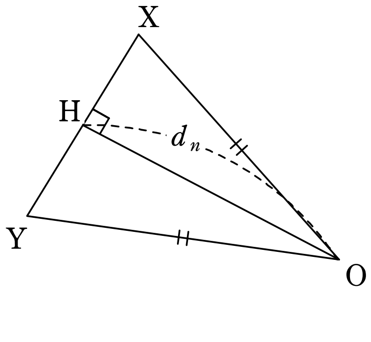
$$x = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{-2} = -2+\sqrt{3}$$

よって $\mathrm{P}\left(-2+\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\right)$ である。

また，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ は O から $m$ に下ろした垂線の足でもあるので，$\mathrm{OP} > \mathrm{OQ}$ である。

原点から $C_n$ の辺に下ろした垂線と原点との距離を $d_n$ とすると，

$n \geqq 5$ のとき $d_n > \mathrm{OP}$ （$\Leftrightarrow$ $d_n{}^2 > \mathrm{OP}^2$）…① であることを示す。




$C_n$ の辺 XY の中点を H とすると

$\angle\mathrm{XOY} = \dfrac{2\pi}{n}$ より $\angle\mathrm{XOH} = \dfrac{\pi}{n}$ であるから

$d_n = \cos\dfrac{\pi}{n}$ となる。よって，$d_n{}^2 = \cos^2\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)$

$$\mathrm{OP}^2=\left(7-4\sqrt{3}\right)+\left(4-2\sqrt{3}\right)=11-6\sqrt{3}$$

したがって，① $\Leftrightarrow$ $\cos\dfrac{2\pi}{n}>21-12\sqrt{3}$

$\cos\dfrac{2\pi}{n}$ は $n$ に関して単調増加であり，

$21-12\sqrt{3}<21-12\cdot 1.73=0.24$

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\cos 72^\circ>\cos 75^\circ=\cos\left(45^\circ+30^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}>\frac{1.4\cdot 0.7}{4}=\frac{0.98}{4}=0.245$$

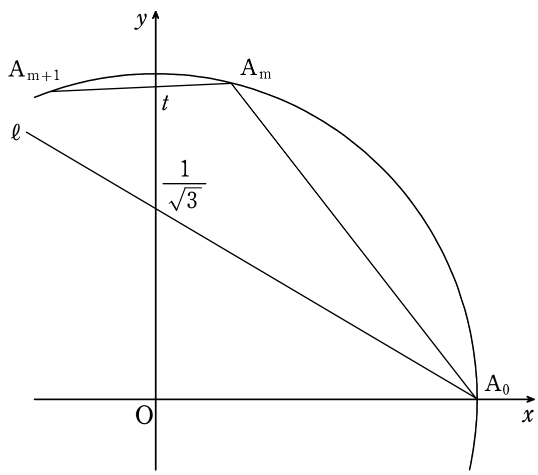
であるから①が成り立つ。よって，題意の共通部分は $D_3\cap D_4$ になる。

（ⅱ）$x\geqq 0$ のとき

$\mathrm{A}_k\left(\cos\dfrac{2\pi k}{n},\ \sin\dfrac{2\pi k}{n}\right)$ とする。

対称性より $y\geqq 0$ の部分について考えればよい。

$n\geqq 4$ とし，$\dfrac{2\pi m}{n}\leqq\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{2\pi(m+1)}{n}$ を満たすように自然数 $m$ を定める。




辺 $\mathrm{A}_m\mathrm{A}_{m+1}$ と $y$ 軸の交点を $(0,\,t)$ とすると

$t\geqq d_n\geqq d_4=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}>\dfrac{1}{\sqrt{3}}=$（$\ell$ の $y$ 切片）

また，$\mathrm{A}_m$ は $\ell$ の上側にあることから，$C_n$ の凸性によって

$x\geqq 0$ にある $C_n$ のすべての辺は $\ell$ の上側にある。

よって，題意の共通部分は $D_3$ になる。

（ⅰ），（ⅱ）より 題意の共通部分は $D_3\cap D_4$ であり，

図 1 の太線で囲まれた部分になる。

この部分の面積は $D_3$ から $\triangle\mathrm{PQR}$ 2 個分を引くと考えて

$$\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\times 3-\frac{1}{2}\mathrm{QR}\cdot\text{（P と Q の } x \text{ 座標の差）}\times 2=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}-3\right)}{4}$$

$$=\frac{8\sqrt{3}-9}{4}$$

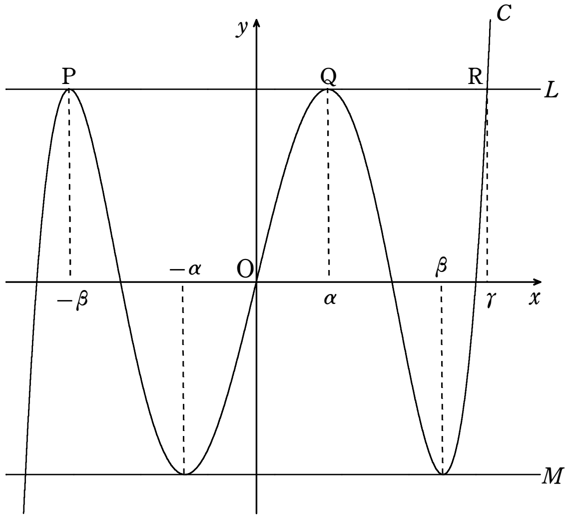
[ 東京工業大学 2010 年 第 1 類特別入試 $\boxed{2}$ ]

☆ ☆

$x$ の 5 次式 $f(x)$ のグラフ $C: y=f(x)$ が平行な 2 直線 $L, M$ のそれぞれと 2 点で接しているようなC, $L$, $M$ の実例を 1 つみつけよ。また，その例について，$C$ と $L$ の交点と 2 つの接点との 3 点により $L$ から切り取られる 2 つの線分の長さの比を求めよ。

☆ ☆

図のように $L, M$ が $x$ 軸に平行になるような実数 $\alpha, \beta \quad (0<\alpha<\beta)$ を考える。




$f'(x)=5\left(x^2-\alpha^2\right)\left(x^2-\beta^2\right)$，$f(0)=0$ とすると

$f'(x)=5x^4-5\left(\alpha^2+\beta^2\right)x^2+5\alpha^2\beta^2$ より

$$f(x)=x^5-\frac{5\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{3}x^3+5\alpha^2\beta^2x \quad \cdots①$$

このとき $f(-x)=-f(x)$ であるから

$$f(\alpha)=f(-\beta),\ f(\beta)=f(-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow\ f(\alpha)+f(\beta)=0$$

を満たす $\alpha, \beta$ であればよく，$0<\alpha<\beta$ のもとで，

$$\left(-\frac{2}{3}\alpha^5+\frac{10}{3}\alpha^3\beta^2\right)+\left(-\frac{2}{3}\beta^5+\frac{10}{3}\alpha^2\beta^3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha^5+\beta^5-5\alpha^2\beta^2\left(\alpha+\beta\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+\beta^4-5\alpha^2\beta^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\alpha+\beta\right)^3\left(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2=0 \quad \cdots②$$

したがって $\beta=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2\alpha$

①，②より $C: y=f(x)=x^5-5\alpha\beta x^3+5\alpha^2\beta^2x$

$\alpha\beta=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\alpha\right)^2$ であるから，$\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ とすると $\alpha\beta=1$ となる。

よって$C$の例は　$y=f(x)=x^5-5x^3+5x$

このとき　$\alpha^2+\alpha-1=0$　$(\alpha^2=-\alpha+1)$　であるから

$$\alpha^3=\alpha\alpha^2=\alpha\left(-\alpha+1\right)=-\alpha^2+\alpha=2\alpha-1$$

$$\alpha^5=\alpha^2\alpha^3=\left(-\alpha+1\right)\left(2\alpha-1\right)=-2\alpha^2+3\alpha-1=5\alpha-3$$

よって，$L,\ M$ の例は

$$L:y=f(\alpha)=(5\alpha-3)-5(2\alpha-1)+5\alpha=2$$

$$M:y=f(-\alpha)=-2$$

この例について，5 次方程式　$f(x)-f(\alpha)=x^5+0x^4+\cdots=0$　の解は

$\alpha,\ \alpha,\ -\beta,\ -\beta,\ \gamma$　であり，解と係数の関係より　$2\alpha-2\beta+\gamma=0$　となる。

よって，$\gamma=2\left(\beta-\alpha\right)=\left(1+\sqrt{5}\right)\alpha$

したがって，求める線分の長さの比$\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}$は

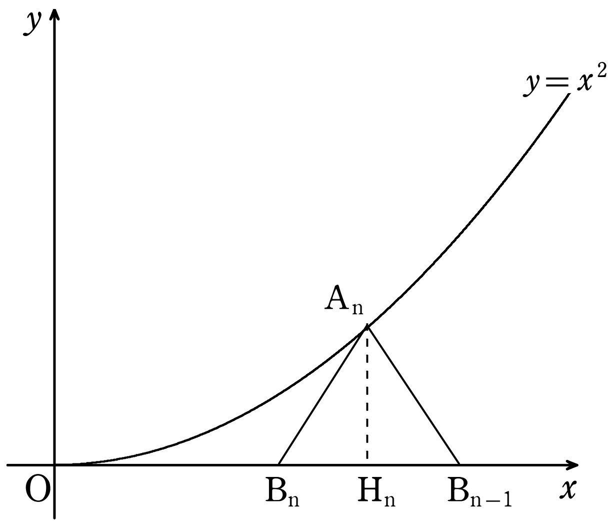
$$\left(\alpha+\beta\right):\left(\gamma-\alpha\right)=\frac{5+\sqrt{5}}{2}:\sqrt{5}=\left(1+\sqrt{5}\right):2$$

[ 東京工業大学 2010 年 第 1 類特別入試 $\boxed{3}$ ]

☆ ☆

放物線 $y = x^2$ 上の右から原点に近づく点列 $\mathrm{A}_n(a_n,\ a_n{}^2)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ と，$x$ 軸上の右から原点に近づく点列 $\mathrm{B}_n(b_n,\ 0)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ があって，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n-1}$ はすべての $n = 1, 2, \cdots$ に対し正三角形を成しており，$a_1 = 1$ であるとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^3$ を求めよ。

☆ ☆




$\mathrm{H}_n\left(a_n,\ 0\right)$ とおく。$\mathrm{H}_n$ は $\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n-1}$ の中点。

$\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n = \sqrt{3} \cdot \dfrac{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n-1}}{2}$ であるから，

$$a_n = \frac{1}{2}\left(b_{n-1} + b_n\right) \quad \cdots ①$$

$$a_n{}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(b_{n-1} - b_n\right) \quad \cdots ②$$

辺々かけて $a_n{}^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(b_{n-1}{}^2 - b_n{}^2\right)$

したがって，自然数 $M$ に対して

$$\sum_{n=1}^{M} a_n{}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{M}\left(b_{n-1} - b_n\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(b_0 - b_M\right)$$

$$\sum_{n=1}^{M} a_n{}^3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{n=1}^{M}\left(b_{n-1}{}^2 - b_n{}^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(b_0{}^2 - b_M{}^2\right)$$

いま，題意より $\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ である。

また，①＋②×$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より $b_{n-1} = a_n + \dfrac{1}{\sqrt{3}} a_n{}^2$ $\cdots ③$

であるから，$a_1 = 1$ より $b_0 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 = \lim_{M \to \infty}\sum_{n=1}^{M} a_n{}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - 0\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^3 = \lim_{M \to \infty}\sum_{n=1}^{M} a_n{}^3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 0\right\} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}+3}{6}$$

## [ 東京工業大学 2010 年 第 1 類特別入試 $\boxed{4}$ ]

$xyz$ 空間内の 3 つの部分集合

$$A=\{(x,\ y,z)\mid |x|\leqq 1,\ y^2+z^2\leqq 1\}$$

$$B=\{(x,\ y,z)\mid |y|\leqq 1,\ x^2+z^2\leqq 1\}$$

$$C=\{(x,\ y,z)\mid |z|\leqq 1,\ x^2+y^2\leqq 1\}$$

の和集合 $A\cup B\cup C$ の体積を求めよ。

---

$A\cup B\cup C$ の平面 $S: z=t\ \left(|t|\leqq 1\right)$ による切り口は

「$|x|\leqq 1$ かつ $y^2\leqq 1-t^2$」または「$|y|\leqq 1$ かつ $x^2\leqq 1-t^2$」または「$x^2+y^2\leqq 1$」

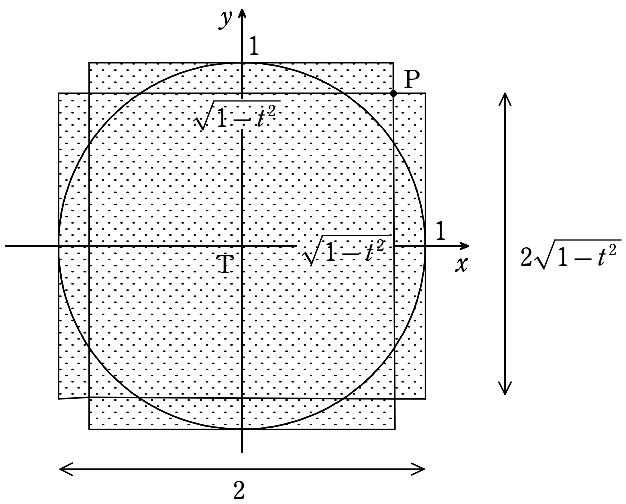
を満たす $(x,\ y)$ 全体 $W$ である。

$S$ 上で点 $\mathrm{T}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}\left(\sqrt{1-t^2},\ \sqrt{1-t^2}\right)$ 間の距離と 1 との大小を考える。

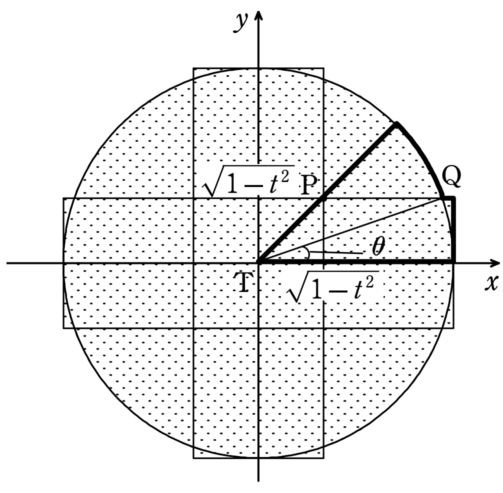
$\mathrm{TP}^2=2\left(1-t^2\right)\geqq 1^2$ となるのは $|t|\leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときなので，$W$ は図の打点部分となる。

$W$ の面積を $S(t)$ とおく。

（i）$|t|\leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき




（ii）$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq |t|\leqq 1$ のとき




$A\cup B\cup C$ は $xy$ 平面に関して対称であるから，$t\geqq 0$ で考えて体積を 2 倍する。

（i）$S(t)=\left(2\sqrt{1-t^2}\times 2\right)\times 2-\left(2\sqrt{1-t^2}\right)^2=8\sqrt{1-t^2}-4\left(1-t^2\right)$ $\cdots$①

（ⅱ）$\mathrm{Q}\left(t,\ \sqrt{1-t^2}\right)$に対して，$x$軸の正方向とTQのなす角を$\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$とおくと，

$t=\cos\theta$ …②，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$

第１象限の打点部分は直線$y=x$に関して対称であり，また，打点部分は$x$軸，$y$軸に関しても対称である。

$\angle\mathrm{PTQ}=\dfrac{\pi}{4}-\theta$ であるから

$S(t)=$（第１象限の打点部分の$y \leqq x$の部分の面積）×8

$$=8\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+\frac{1}{2}\{(1-\cos\theta)+1\}\sin\theta\right\}$$

$$=\pi-4\theta+8\sin\theta-4\sin\theta\cos\theta \quad \cdots③$$

（ⅰ），（ⅱ）より，求める体積$V$は

$$V=2\int_0^1 S(t)dt$$

$$=2\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{8\sqrt{1-t^2}-4\left(1-t^2\right)\right\}dt+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\{\pi-4\theta+8\sin\theta-4\sin\theta\cos\theta\}dt\right\}$$

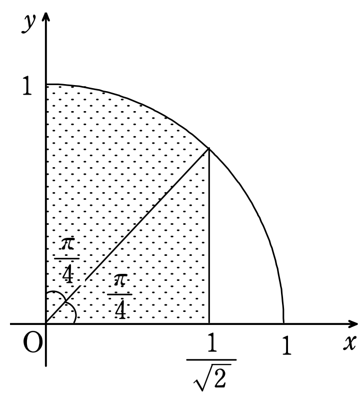
である。

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{8\sqrt{1-t^2}-4\left(1-t^2\right)\right\}dt$

$$=8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-t^2}dt-\left[4t-\frac{4t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=8\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$=\pi+2-\frac{5\sqrt{2}}{3}$$




さらに，$\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\{\pi-4\theta+8\sin\theta-4\sin\theta\cos\theta\}dt$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^0(\pi-4\theta+8\sin\theta-4\sin\theta\cos\theta)(-\sin\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\pi-4\theta)\sin\theta\,d\theta+8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta-4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta \quad \cdots（＊）$$

であり，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\pi-4\theta)\sin\theta\,d\theta=\Big[-(\pi-4\theta)\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\cos\theta\,d\theta=\pi-\Big[4\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi-2\sqrt{2}$$

$$8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta=4\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi-2$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta=4\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=4\cdot\frac{1}{6\sqrt{2}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}$$

であるから

（＊）$=\pi-2\sqrt{2}+\pi-2-\dfrac{2}{3\sqrt{2}}=2\pi-2-\dfrac{7\sqrt{2}}{3}$

となるので

$$V=2\left\{\left(\pi+2-\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)+\left(2\pi-2-\frac{7\sqrt{2}}{3}\right)\right\}=6\pi-8\sqrt{2}$$

である。