[東京工業大学 2010 年 第 1 類特別入試 $\boxed{4}$]

xyz 空間内の 3 つの部分集合

$$A=\{(x,\ y,z)\mid |x|\leqq 1,\ y^2+z^2\leqq 1\}$$

$$B=\{(x,\ y,z)\mid |y|\leqq 1,\ x^2+z^2\leqq 1\}$$

$$C=\{(x,\ y,z)\mid |z|\leqq 1,\ x^2+y^2\leqq 1\}$$

の和集合 $A\cup B\cup C$ の体積を求めよ。

$A\cup B\cup C$ の平面 $S: z=t\ \left(|t|\leqq 1\right)$ による切り口は

「$|x|\leqq 1$ かつ $y^2\leqq 1-t^2$」または「$|y|\leqq 1$ かつ $x^2\leqq 1-t^2$」または「$x^2+y^2\leqq 1$」

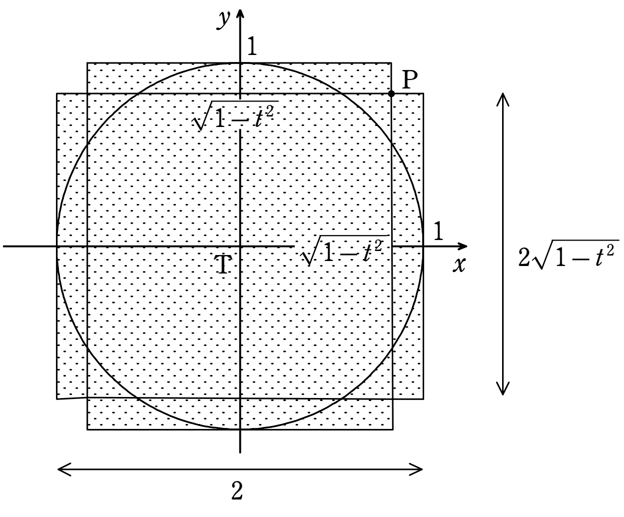
を満たす $(x,\ y)$ 全体 W である。

S 上で点 $\mathrm{T}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}\left(\sqrt{1-t^2},\ \sqrt{1-t^2}\right)$ 間の距離と 1 との大小を考える。

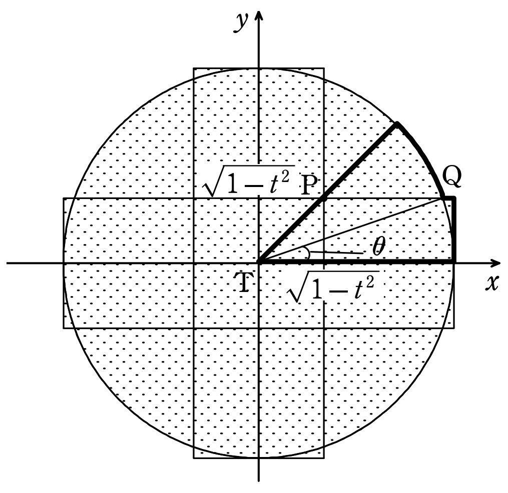
$\mathrm{TP}^2=2\left(1-t^2\right)\geqq 1^2$ となるのは $|t|\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときなので，W は図の打点部分となる。

W の面積を $S(t)$ とおく。

（i）$|t|\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき



（ii）$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq|t|\leqq 1$ のとき



$A\cup B\cup C$ は xy 平面に関して対称であるから，$t\geqq 0$ で考えて体積を 2 倍する。

（i）$S(t)=\left(2\sqrt{1-t^2}\times 2\right)\times 2-\left(2\sqrt{1-t^2}\right)^2=8\sqrt{1-t^2}-4\left(1-t^2\right)$ $\cdots$①

（ⅱ）$Q\left(t,\ \sqrt{1-t^2}\right)$ に対して，x 軸の正方向と TQ のなす角を θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと，

$t=\cos\theta$ …②，$Q(\cos\theta,\ \sin\theta)$

第 1 象限の打点部分は直線 $y=x$ に関して対称であり，また，打点部分は x 軸，y 軸に関しても対称である。

$\angle \mathrm{PTQ}=\dfrac{\pi}{4}-\theta$ であるから

$S(t)=$（第 1 象限の打点部分の $y \leqq x$ の部分の面積）$\times 8$

$$=8\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+\frac{1}{2}\{(1-\cos\theta)+1\}\sin\theta\right\}$$

$$=\pi-4\theta+8\sin\theta-4\sin\theta\cos\theta \quad \cdots③$$

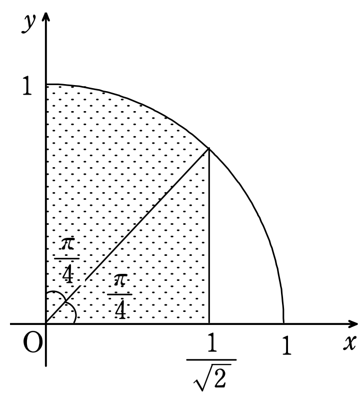
（ⅰ)，（ⅱ)より，求める体積 V は

$$V=2\int_0^1 S(t)\,dt$$

$$=2\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{8\sqrt{1-t^2}-4\left(1-t^2\right)\right\}dt+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\{\pi-4\theta+8\sin\theta-4\sin\theta\cos\theta\}\,dt\right\}$$

である。

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left\{8\sqrt{1-t^2}-4\left(1-t^2\right)\right\}dt$



$$=8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-t^2}\,dt-\left[4t-\frac{4t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=8\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$=\pi+2-\frac{5\sqrt{2}}{3}$$

さらに，$\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\{\pi-4\theta+8\sin\theta-4\sin\theta\cos\theta\}\,dt$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^0(\pi-4\theta+8\sin\theta-4\sin\theta\cos\theta)(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\pi-4\theta)\sin\theta\,d\theta+8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta-4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta \quad \cdots（＊）$$

であり，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\pi-4\theta)\sin\theta\,d\theta=\Big[-(\pi-4\theta)\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\cos\theta\,d\theta=\pi-\Big[4\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi-2\sqrt{2}$$

$$8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta=4\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi-2$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta=4\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=4\cdot\frac{1}{6\sqrt{2}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}$$

であるから

（＊）$=\pi-2\sqrt{2}+\pi-2-\dfrac{2}{3\sqrt{2}}=2\pi-2-\dfrac{7\sqrt{2}}{3}$

となるので

$$V=2\left\{\left(\pi+2-\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)+\left(2\pi-2-\frac{7\sqrt{2}}{3}\right)\right\}=6\pi-8\sqrt{2}$$

である。