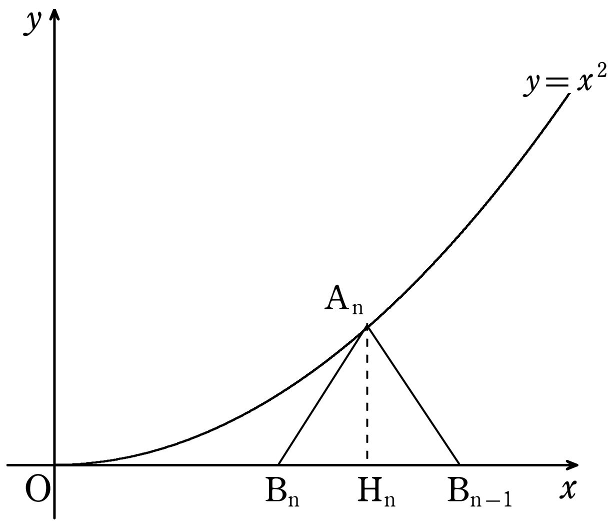
[東京工業大学 2010 年 第 1 類特別入試 $\boxed{3}$]

放物線 $y=x^2$ 上の右から原点に近づく点列 $\mathrm{A}_n(a_n,\ a_n{}^2)\ \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ と，x 軸上の右から原点に近づく点列 $\mathrm{B}_n(b_n,\ 0)\ \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ があって，$\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n-1}$ はすべての $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対し正三角形を成しており，$a_1=1$ であるとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^3$ を求めよ。



$\mathrm{H}_n\left(a_n,\ 0\right)$ とおく。H_n は $\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n-1}$ の中点。

$\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n-1}}{2}$ であるから，

$$a_n=\frac{1}{2}\left(b_{n-1}+b_n\right)\ \cdots①$$

$$a_n{}^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(b_{n-1}-b_n\right)\ \cdots②$$

辺々かけて $a_n{}^3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(b_{n-1}{}^2-b_n{}^2\right)$

したがって，自然数 M に対して

$$\sum_{n=1}^{M}a_n{}^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{M}\left(b_{n-1}-b_n\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(b_0-b_M\right)$$

$$\sum_{n=1}^{M}a_n{}^3=\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{n=1}^{M}\left(b_{n-1}{}^2-b_n{}^2\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(b_0{}^2-b_M{}^2\right)$$

いま，題意より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$ である。

また，①＋②×$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より $b_{n-1}=a_n+\dfrac{1}{\sqrt{3}}a_n{}^2\ \cdots③$

であるから，$a_1=1$ より $b_0=1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2=\lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{M}a_n{}^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}-0\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^3=\lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{M}a_n{}^3=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-0\right\}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4+2\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}+3}{6}$$