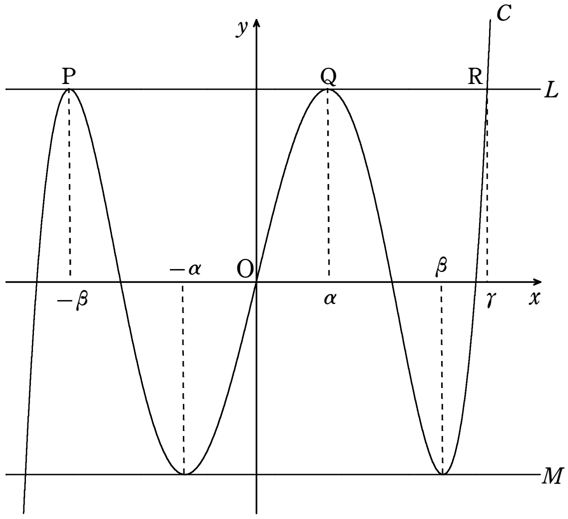
[東京工業大学 2010 年 第 1 類特別入試 $\boxed{2}$]

x の 5 次式 $f(x)$ のグラフ $C: y = f(x)$ が平行な 2 直線 L, M のそれぞれと 2 点で接しているようなC, L, M の実例を 1 つみつけよ。また，その例について，C と L の交点と 2 つの接点との 3 点により L から切り取られる 2 つの線分の長さの比を求めよ。

図のように L, M が x 軸に平行になるような実数 $\alpha, \beta \quad (0<\alpha<\beta)$ を考える。



$f'(x) = 5\left(x^2-\alpha^2\right)\left(x^2-\beta^2\right)$，　$f(0)=0$ とすると

$f'(x) = 5x^4 - 5\left(\alpha^2+\beta^2\right)x^2 + 5\alpha^2\beta^2$ より

$f(x) = x^5 - \dfrac{5\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{3}x^3 + 5\alpha^2\beta^2 x$ …①

このとき $f(-x) = -f(x)$ であるから

$$f(\alpha) = f(-\beta),\ f(\beta) = f(-\alpha)$$

$\Leftrightarrow\ f(\alpha)+f(\beta)=0$

を満たす α, β であればよく，$0<\alpha<\beta$ のもとで，

$$\left(-\frac{2}{3}\alpha^5+\frac{10}{3}\alpha^3\beta^2\right)+\left(-\frac{2}{3}\beta^5+\frac{10}{3}\alpha^2\beta^3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha^5+\beta^5-5\alpha^2\beta^2\left(\alpha+\beta\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\alpha+\beta\right)\left(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+\beta^4-5\alpha^2\beta^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\alpha+\beta\right)^3\left(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2=0 \quad \cdots②$$

したがって $\beta = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2\alpha$

①，②より $C: y = f(x) = x^5 - 5\alpha\beta x^3 + 5\alpha^2\beta^2 x$

$\alpha\beta = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\alpha\right)^2$ であるから，$\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ とすると $\alpha\beta = 1$ となる。

よってCの例は　$y=f(x)=x^5-5x^3+5x$

このとき　$\alpha^2+\alpha-1=0$　$(\alpha^2=-\alpha+1)$　であるから

$$\alpha^3=\alpha\alpha^2=\alpha\left(-\alpha+1\right)=-\alpha^2+\alpha=2\alpha-1$$

$$\alpha^5=\alpha^2\alpha^3=\left(-\alpha+1\right)\left(2\alpha-1\right)=-2\alpha^2+3\alpha-1=5\alpha-3$$

よって，$L,\ M$ の例は

$L: y=f(\alpha)=(5\alpha-3)-5(2\alpha-1)+5\alpha=2$

$M: y=f(-\alpha)=-2$

この例について，5 次方程式　$f(x)-f(\alpha)=x^5+0x^4+\cdots=0$　の解は

$\alpha,\ \alpha,\ -\beta,\ -\beta,\ \gamma$　であり，解と係数の関係より　$2\alpha-2\beta+\gamma=0$　となる。

よって，$\gamma=2\left(\beta-\alpha\right)=\left(1+\sqrt{5}\right)\alpha$

したがって，求める線分の長さの比$\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}$は

$$\left(\alpha+\beta\right):\left(\gamma-\alpha\right)=\frac{5+\sqrt{5}}{2}:\sqrt{5}=\left(1+\sqrt{5}\right):2$$