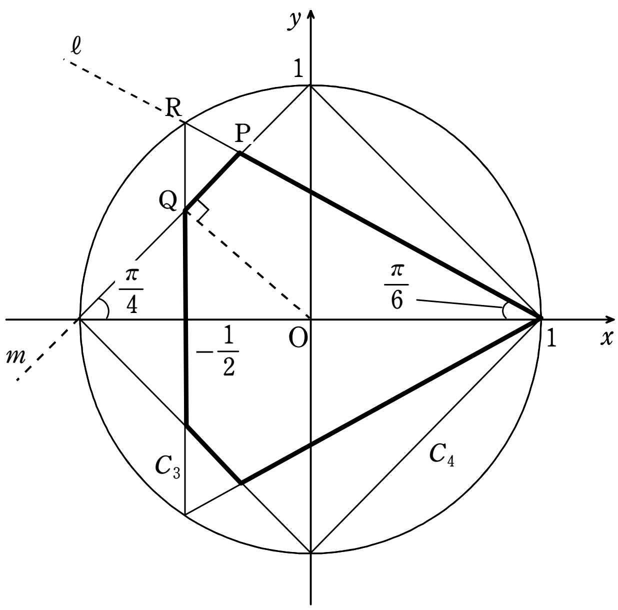
[東京工業大学 2010 年 第 1 類特別入試 $\boxed{1}$]

この試験は現時点での諸君の論理的理解力の習熟度を測るためのものであり，あまりに乱暴な字ではその役に立ちません。できるだけ丁寧な字で，採点員が論理を追い易いように各自工夫し，結論ははっきりと記述してください。

xy 平面の n 個の点 $\left(\cos\dfrac{2k\pi}{n}, \sin\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ を頂点とする正 n 角形の周および内部を D_n とする。このとき，$D_3, D_4, D_5, D_6, \cdots$ の共通部分の面積を求めよ。

D_n の周を C_n とする。

図 1



（ｉ）$x \leqq 0$ のとき

C_3 と C_4 の交点と原点の距離を考える。

対称性より図 1 の P, Q について考えればよい。

$\ell : y = -\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}$，$m : y = x+1$ を連立して

$-x+1 = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ より

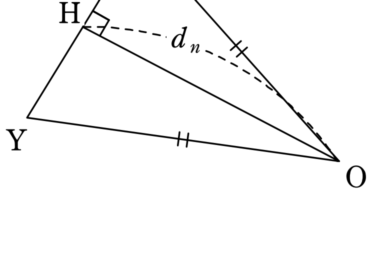
$$x = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{-2} = -2+\sqrt{3}$$

よって $\mathrm{P}\left(-2+\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\right)$ である。

また，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ は O から m に下ろした垂線の足でもあるので，$\mathrm{OP} > \mathrm{OQ}$ である。

原点から C_n の辺に下ろした垂線と原点との距離を d_n とすると，

$n \geqq 5$ のとき $d_n > \mathrm{OP}$（$\Leftrightarrow$ $d_n{}^2 > \mathrm{OP}^2$）…① であることを示す。



C_n の辺 XY の中点を H とすると

$\angle\mathrm{XOY} = \dfrac{2\pi}{n}$ より $\angle\mathrm{XOH} = \dfrac{\pi}{n}$ であるから

$d_n = \cos\dfrac{\pi}{n}$ となる。よって，$d_n{}^2 = \cos^2\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)$

$\mathrm{OP}^2=\left(7-4\sqrt{3}\right)+\left(4-2\sqrt{3}\right)=11-6\sqrt{3}$

したがって，① $\Leftrightarrow$ $\cos\dfrac{2\pi}{n}>21-12\sqrt{3}$

$\cos\dfrac{2\pi}{n}$ は n に関して単調増加であり，

$21-12\sqrt{3}<21-12\cdot 1.73=0.24$

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\cos 72^\circ>\cos 75^\circ=\cos\left(45^\circ+30^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}>\frac{1.4\cdot 0.7}{4}=\frac{0.98}{4}=0.245$$

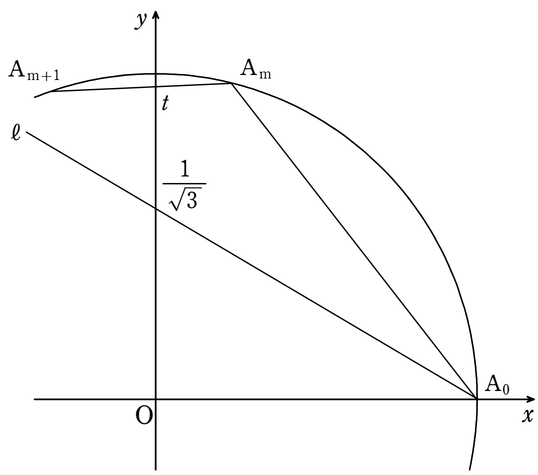
であるから①が成り立つ。よって，題意の共通部分は $D_3\cap D_4$ になる。

（ⅱ）$x\geqq 0$ のとき

$\mathrm{A}_k\left(\cos\dfrac{2\pi k}{n},\ \sin\dfrac{2\pi k}{n}\right)$ とする。

対称性より $y\geqq 0$ の部分について考えればよい。

$n\geqq 4$ とし，$\dfrac{2\pi m}{n}\leqq\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{2\pi(m+1)}{n}$ を満たすように自然数 m を定める。



辺 $\mathrm{A}_m\mathrm{A}_{m+1}$ と y 軸の交点を $(0,\ t)$ とすると

$t\geqq d_n\geqq d_4=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}>\dfrac{1}{\sqrt{3}}=$（$\ell$ の y 切片）

また，A_m は ℓ の上側にあることから，C_n の凸性によって

$x\geqq 0$ にある C_n のすべての辺は ℓ の上側にある。

よって，題意の共通部分は D_3 になる。

（ⅰ），（ⅱ）より 題意の共通部分は $D_3\cap D_4$ であり，

図 1 の太線で囲まれた部分になる。

この部分の面積は D_3 から△PQR 2 個分を引くと考えて

$$\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\times 3-\frac{1}{2}\mathrm{QR}\cdot\text{（P と Q の } x \text{ 座標の差）}\times 2=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}-3\right)}{4}$$

$$=\frac{8\sqrt{3}-9}{4}$$