[東京工業大学 2010 年後期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

$a,\ b,\ t$ は実数で，$a \geqq 0 > b$ とする。次の漸化式により，数列 $a_n,\ b_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ を定める。

$$a_1 = a,\ b_1 = b \qquad a_{n+1} = \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{t^2+1}\right)a_n + \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{t^2+1}\right)b_n$$

$$b_{n+1} = \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{t^2+1}\right)a_n + \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{t^2+1}\right)b_n$$

(1) a_n を $a,\ b,\ t,\ n$ を用いて表せ。

(2) $n \to \infty$ とするとき，a_n が収束するための $a,\ b,\ t$ についての必要十分条件を求めよ。

☆ ☆

(1) $a_{n+1} = \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{t^2+1}\right)a_n + \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{t^2+1}\right)b_n \quad \cdots①$

$b_{n+1} = \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{t^2+1}\right)a_n + \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{t^2+1}\right)b_n \quad \cdots②$

①＋②より　$a_{n+1} + b_{n+1} = t\left(a_n + b_n\right)$

よって $\{a_n + b_n\}$ は等比数列なので　$a_n + b_n = t^{n-1}(a_1 + b_1) = t^{n-1}(a+b) \quad \cdots③$

①－②より　$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{10}{t^2+1}\left(a_n - b_n\right)$

よって $\{a_n - b_n\}$ は等比数列なので　$a_n - b_n = \left(\frac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}(a_1 - b_1) = \left(\frac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}(a-b) \quad \cdots④$

（③＋④）÷2 より　$a_n = \frac{1}{2}\left\{t^{n-1}(a+b) + \left(\frac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}(a-b)\right\}$

(2)（ⅰ）$(0<)\left(\frac{10}{t^2+1}\right)^{n-1} \leqq 1$ となるのは

$10 \leqq t^2+1 \Leftrightarrow t^2 \geqq 9 \Leftrightarrow t \leqq -3,\ 3 \leqq t$　のときで,

このとき，a_n が収束するための必要十分条件は

$t^{n-1}(a+b)$ が収束することであり，$a+b=0$ である。

（ⅱ）$-3<t<3$ のとき

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}\left\{(a+b)\left(\frac{t^3+t}{10}\right)^{n-1}+a-b\right\}$$ と変形できる。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}=\infty$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{(a+b)\left(\frac{t^3+t}{10}\right)^{n-1}+a-b\right\}=0$ でなければならない。

ここで，$\dfrac{t^3+t}{10}$ について考える。

（ⅱ－１）$\left|\dfrac{t^3+t}{10}\right|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{(a+b)\left(\frac{t^3+t}{10}\right)^{n-1}+a-b\right\}=a-b$ となるが，

$a\geqq 0>b$ より $a-b=0$ とはならない。

（ⅱ－２）$\dfrac{t^3+t}{10}>1$ または $\dfrac{t^3+t}{10}\leqq -1$ のとき

$a+b=0$ であることが必要で，このとき $(a+b)\left(\dfrac{t^3+t}{10}\right)^{n-1}+a-b=a-b$ となるが，

$a\geqq 0>b$ より $a-b=0$ とはならない。

（ⅲ－３）$\dfrac{t^3+t}{10}=1$ のとき

$t^3+t-10=0 \iff (t-2)(t^2+2t+5)=0$ であり，

$t=2$（これは $-3<t<3$ を満たす）となる。

このとき，$(a+b)\left(\dfrac{t^3+t}{10}\right)^{n-1}+a-b=2a$ となるので，

$a=0$ であることが必要である。

逆に，$t=2,\ a=0$ のとき，$a_n=0$ となり，十分でもある。

よって，求める必要十分条件は

「$a+b=0$ かつ（$t\leqq -3$ または $t\geqq 3$）」 または 「$a=0$ かつ $t=2$」

[東京工業大学 2010 年後期 $\boxed{2}$]

座標平面上で $y=(\log x)^2\ (x>0)$ の表す曲線を C とし，$\alpha>0$ に対し，点 $(\alpha,\ (\log\alpha)^2)$ における C の接線を $L(\alpha)$ で表す。

(1) C のグラフの概形を描け。

(2) C と $L(\alpha)$ の共有点の個数を $n(\alpha)$ とする。$n(\alpha)$ を求めよ。

(3) $0<\alpha<1$ とし，C と $L(\alpha)$ および x 軸とで囲まれる領域の面積を $S(\alpha)$ とする。$S(\alpha)$ を求めよ。

$\mathrm{A}\left(\alpha,\ (\log\alpha)^2\right)$ とする。

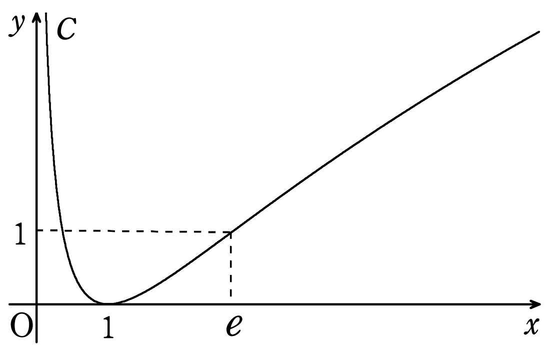
(1) $y=(\log x)^2$ に対して $y'=2\left(\log x\right)\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\log x}{x}$ …①

$$y''=\frac{2\left\{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\right\}}{x^2}=\frac{2(1-\log x)}{x^2}\quad\cdots②$$

であるから y の増減は下表に従う。

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$
y		↘	0	↗	1	↗

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}y=\infty,\ \lim_{x\to\infty}y=\infty$ であるからグラフは次の図のようになる。



(2) ①より　$L(\alpha)$ ： $y=\dfrac{2\log\alpha}{\alpha}(x-\alpha)+\left(\log\alpha\right)^2$　である。

$f(x)=\left(\log x\right)^2-\dfrac{2\log\alpha}{\alpha}(x-\alpha)-\left(\log\alpha\right)^2$　とおくと，

$y=f(x)$ と x 軸との交点の個数が $n(\alpha)$ である。

$f(\alpha)=0$　であり，①より　$f'(x)=\dfrac{2\log x}{x}-\dfrac{2\log\alpha}{\alpha}$　である。

$g(x)=\dfrac{\log x}{x}$　とおくと　$g'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$　であるから $g(x)$ の増減は下表に従う。

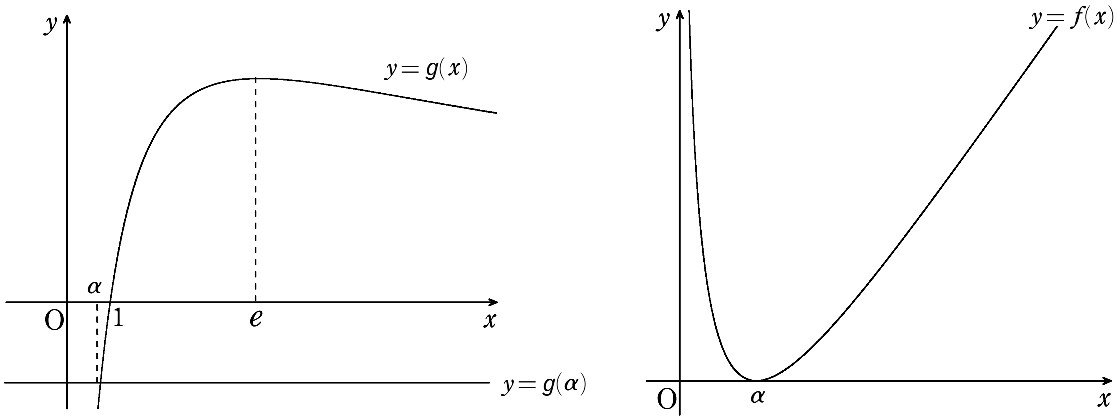
x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

また，$\lim_{x\to+0}g(x)=-\infty$，$\lim_{x\to\infty}g(x)=0$　である。

ここで，$f'(x)=2\{g(x)-g(\alpha)\}$　であり，

$y=g(x)$ のグラフと $y=g(\alpha)$ のグラフの関係により $y=f(x)$ のグラフについて場合分けをする。

（ｉ）$0<\alpha\leqq 1$　のとき



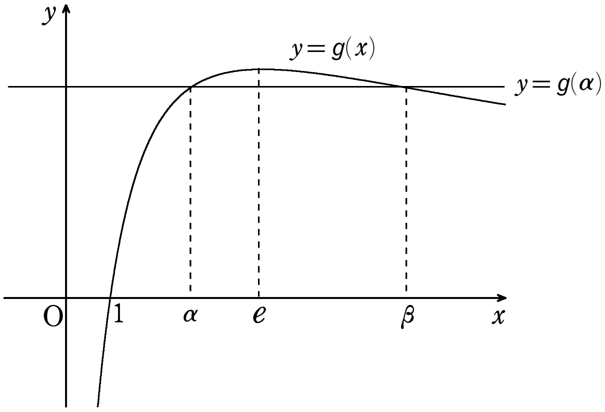
より　$n(\alpha)=1$

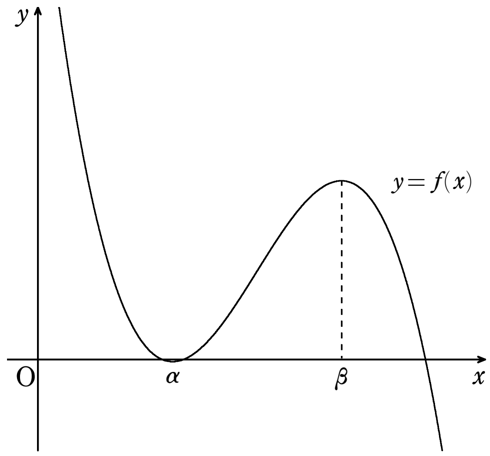
（ⅱ）$1<\alpha<e$　のとき

$f(x)=x\left\{\dfrac{(\log x)^2}{x}-\dfrac{2\log\alpha}{\alpha}\right\}+$（定数）と変形すると

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\log x)^2}{x}=0$　かつ　$\dfrac{2\log\alpha}{\alpha}>0$　より　$\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$　なので

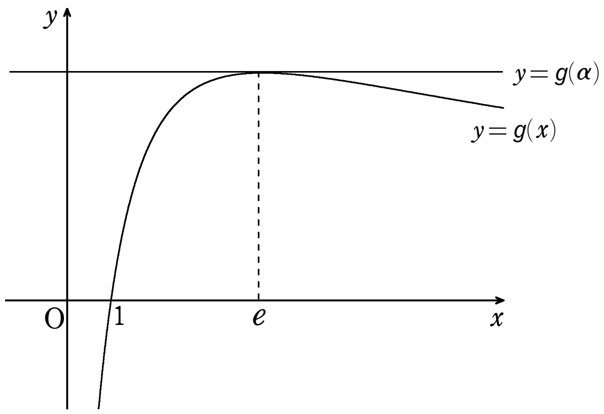
グラフは次の図のようになる。

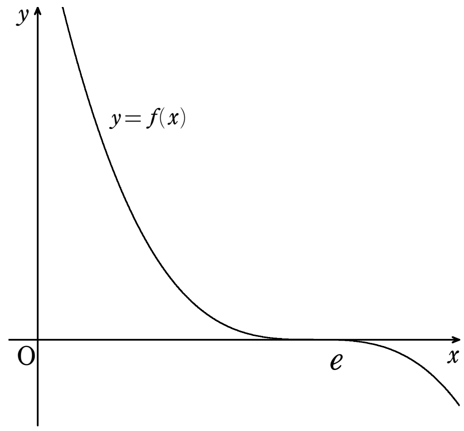




より　$n(\alpha)=2$

（iii）$\alpha=e$　のとき

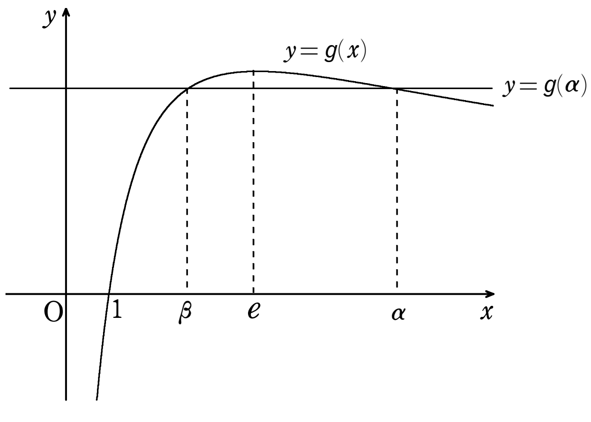


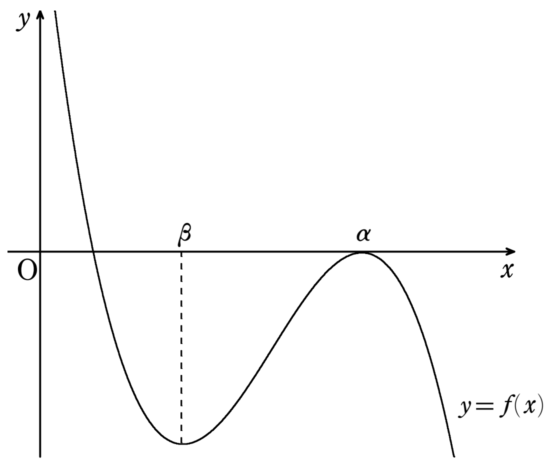


より　$n(\alpha)=1$

（iv）$\alpha>e$　のとき

$\lim_{x\to+0} f(x)=\infty$　であるから





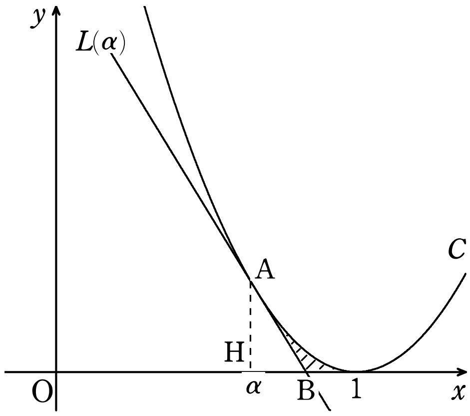
より　$n(\alpha)=2$

以上より　$0<\alpha\leqq 1,\ \alpha=e$　のとき　$n(\alpha)=1$

$1<\alpha<e,\ \alpha>e$　のとき　$n(\alpha)=2$

(3) $L(\alpha)$ と x 軸との交点の座標は $\mathrm{B}\left(\alpha-\dfrac{\alpha\log\alpha}{2},\ 0\right)$ である。

$0<\alpha<1$ より $\mathrm{H}(\alpha,\ 0)$ はBより左側にあるので



$$S(\alpha)=\int_{\alpha}^{1}(\log x)^2\,dx-\triangle\mathrm{ABH}$$

$$=\int_{\alpha}^{1}(\log x)^2\,dx-\frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha\log\alpha}{2}\right)\left(\log\alpha\right)^2$$

ここで，$\displaystyle\int(\log x)^2dx=x(\log x)^2-\int 2x(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$$=x(\log x)^2-2\int\log x\,dx$$

$$=x(\log x)^2-2x(\log x-1)+D$$ （D は積分定数）

であるから，

$$S(\alpha)=\Big[x(\log x)^2-2x(\log x-1)\Big]_{\alpha}^{1}+\frac{\alpha(\log\alpha)^3}{4}$$

$$=2-\alpha(\log\alpha)^2+2\alpha(\log\alpha-1)+\frac{\alpha(\log\alpha)^3}{4}$$

$$=\frac{\alpha(\log\alpha)^3}{4}-\alpha(\log\alpha)^2+2\alpha\log\alpha-2\alpha+2$$

となる。