[東京工業大学 2010 年後期 $\boxed{1}$]

☆――☆

$a,\ b,\ t$ は実数で，$a \geqq 0 > b$ とする。次の漸化式により，数列 $a_n,\ b_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ を定める。

$$a_1 = a,\ b_1 = b \qquad a_{n+1} = \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{t^2+1}\right)a_n + \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{t^2+1}\right)b_n$$

$$b_{n+1} = \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{t^2+1}\right)a_n + \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{t^2+1}\right)b_n$$

(1) a_n を $a,\ b,\ t,\ n$ を用いて表せ。

(2) $n \to \infty$ とするとき，a_n が収束するための $a,\ b,\ t$ についての必要十分条件を求めよ。

☆――☆

[東京工業大学 2010 年後期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

座標平面上で $y=(\log x)^2\ (x>0)$ の表す曲線を C とし，$\alpha>0$ に対し，点 $(\alpha,\ (\log\alpha)^2)$ における C の接線を $L(\alpha)$ で表す。

(1) C のグラフの概形を描け。

(2) C と $L(\alpha)$ の共有点の個数を $n(\alpha)$ とする。$n(\alpha)$ を求めよ。

(3) $0<\alpha<1$ とし，C と $L(\alpha)$ および x 軸とで囲まれる領域の面積を $S(\alpha)$ とする。$S(\alpha)$ を求めよ。

☆ ☆