

[ 東京工業大学 2010 年後期 2 ]



座標平面上で  $y = (\log x)^2$  ( $x > 0$ ) の表す曲線を  $C$  とし,  $\alpha > 0$  に対し, 点  $(\alpha, (\log \alpha)^2)$  における  $C$  の接線を  $L(\alpha)$  で表す。

- (1)  $C$  のグラフの概形を描け。
- (2)  $C$  と  $L(\alpha)$  の共有点の個数を  $n(\alpha)$  とする。  $n(\alpha)$  を求めよ。
- (3)  $0 < \alpha < 1$  とし,  $C$  と  $L(\alpha)$  および  $x$  軸とで囲まれる領域の面積を  $S(\alpha)$  とする。  $S(\alpha)$  を求めよ。



$A(\alpha, (\log \alpha)^2)$  とする。

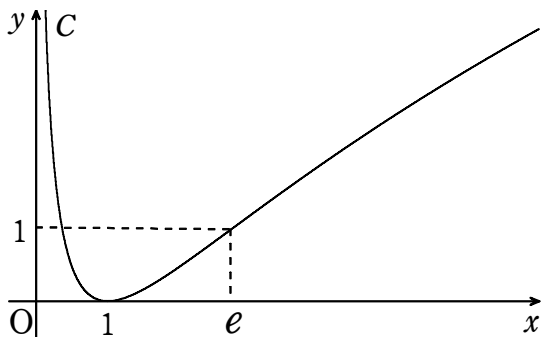
(1)  $y = (\log x)^2$  に対して  $y' = 2(\log x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \log x}{x} \dots \textcircled{1}$

$$y'' = \frac{2 \left\{ \frac{1}{x} \cdot x - \log x \right\}}{x^2} = \frac{2(1 - \log x)}{x^2} \dots \textcircled{2}$$

であるから  $y$  の増減は下表に従う。

$x$	$(0)$	$\dots$	$1$	$\dots$	$e$	$\dots$
$y'$		$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$y''$		$+$	$+$	$+$	$0$	$-$
$y$		$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$1$	$\nearrow$

また,  $\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$  であるからグラフは次の図のようになる。



(2) ①より  $L(\alpha) : y = \frac{2\log \alpha}{\alpha}(x-\alpha) + (\log \alpha)^2$  である。

$$f(x) = (\log x)^2 - \frac{2\log \alpha}{\alpha}(x-\alpha) - (\log \alpha)^2 \text{ とおくと,}$$

$y = f(x)$  と  $x$  軸との交点の個数が  $n(\alpha)$  である。

$$f(\alpha) = 0 \text{ であり, ①より } f'(x) = \frac{2\log x}{x} - \frac{2\log \alpha}{\alpha} \text{ である。}$$

$$g(x) = \frac{\log x}{x} \text{ とおくと } g'(x) = \frac{1-\log x}{x^2} \text{ であるから } g(x) \text{ の増減は下表に従う。}$$

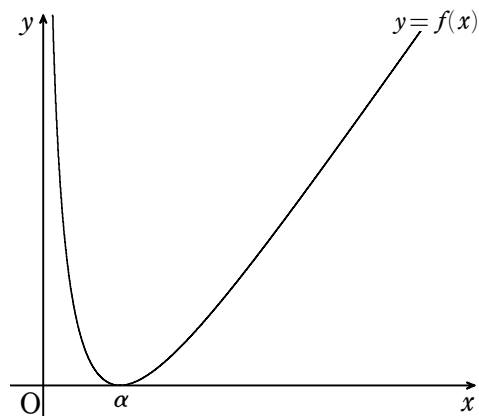
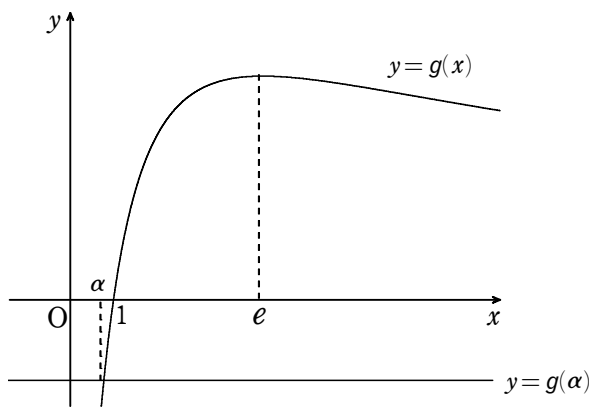
$x$	$(0)$	$\dots$	$e$	$\dots$
$g'(x)$		$+$	$0$	$-$
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

また,  $\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  である。

ここで,  $f'(x) = 2\{g(x) - g(\alpha)\}$  であり,

$y = g(x)$  のグラフと  $y = g(\alpha)$  のグラフの関係により  $y = f(x)$  のグラフについて場合分けをする。

(i)  $0 < \alpha \leq 1$  のとき



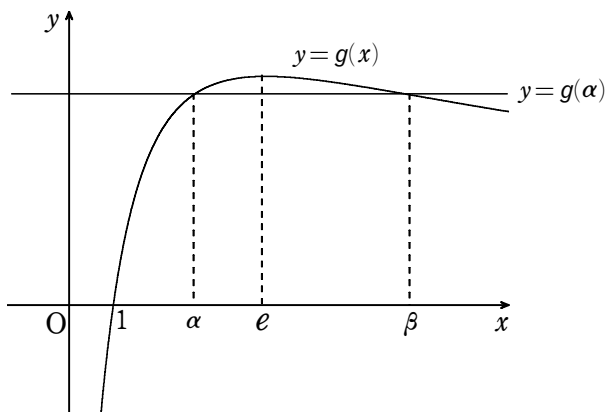
より  $n(\alpha) = 1$

(ii)  $1 < \alpha < e$  のとき

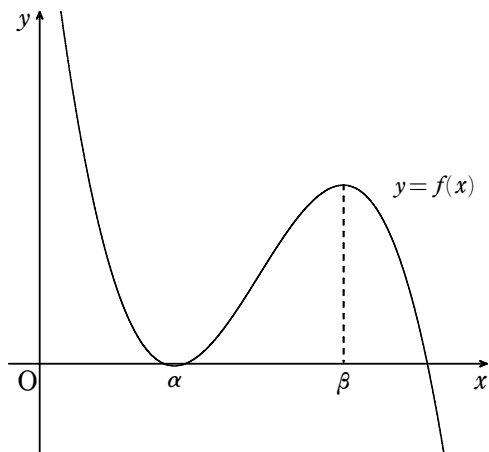
$$f(x) = x \left\{ \frac{(\log x)^2}{x} - \frac{2\log \alpha}{\alpha} \right\} + (\text{定数}) \text{ と変形すると}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0 \text{ かつ } \frac{2\log \alpha}{\alpha} > 0 \text{ より } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \text{ なので}$$

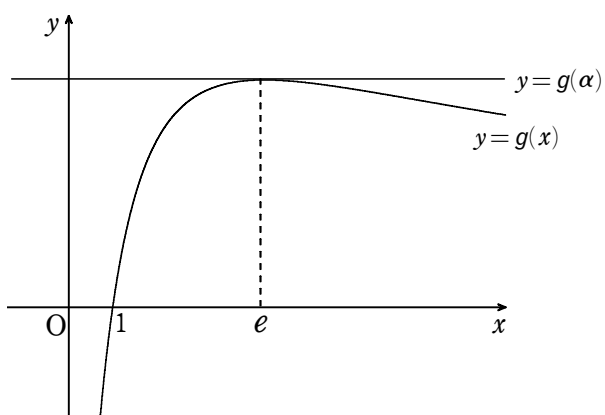
グラフは次の図のようになる。



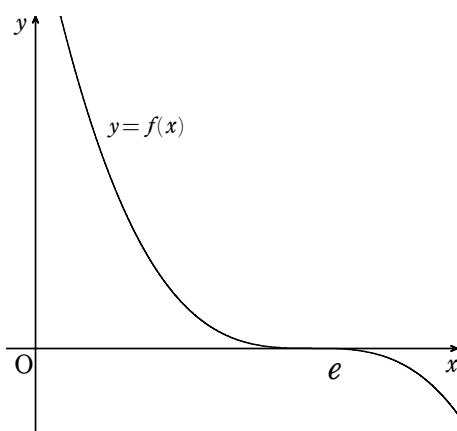
より  $n(\alpha) = 2$



(iii)  $\alpha = e$  のとき

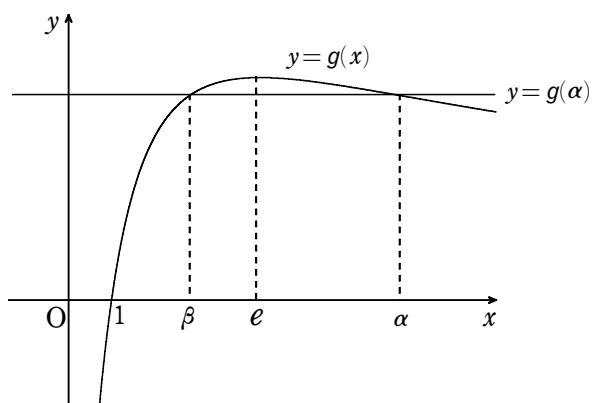


より  $n(\alpha) = 1$

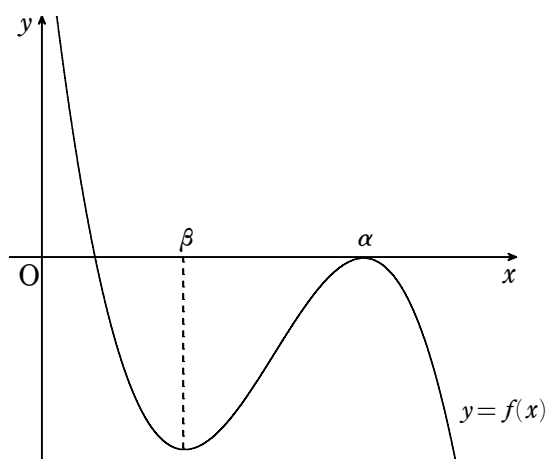


(iv)  $\alpha > e$  のとき

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$  であるから



より  $n(\alpha) = 2$



以上より  $0 < \alpha \leq 1, \alpha = e$  のとき  $n(\alpha) = 1$

$1 < \alpha < e, \alpha > e$  のとき  $n(\alpha) = 2$

(3)  $L(\alpha)$  と  $x$  軸との交点の座標は  $B\left(\alpha - \frac{\alpha \log \alpha}{2}, 0\right)$  である。

$0 < \alpha < 1$  より  $H(\alpha, 0)$  は  $B$  より左側にあるので

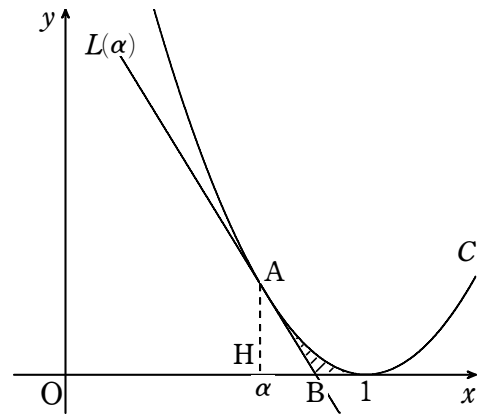
$$S(\alpha) = \int_{\alpha}^1 (\log x)^2 dx - \triangle ABH$$

$$= \int_{\alpha}^1 (\log x)^2 dx - \frac{1}{2} \left( -\frac{\alpha \log \alpha}{2} \right) (\log \alpha)^2$$

ここで,  $\int (\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - \int 2x(\log x) \cdot \frac{1}{x} dx$

$$= x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx$$

$$= x(\log x)^2 - 2x(\log x - 1) + D \quad (D \text{ は積分定数})$$



であるから,

$$S(\alpha) = \left[ x(\log x)^2 - 2x(\log x - 1) \right]_{\alpha}^1 + \frac{\alpha(\log \alpha)^3}{4}$$

$$= 2 - \alpha(\log \alpha)^2 + 2\alpha(\log \alpha - 1) + \frac{\alpha(\log \alpha)^3}{4}$$

$$= \frac{\alpha(\log \alpha)^3}{4} - \alpha(\log \alpha)^2 + 2\alpha \log \alpha - 2\alpha + 2$$

となる。