[東京工業大学 2010 年後期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

$a,\ b,\ t$ は実数で，$a \geqq 0 > b$ とする。次の漸化式により，数列 $a_n,\ b_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ を定める。

$$a_1 = a,\ b_1 = b \qquad a_{n+1} = \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{t^2+1}\right)a_n + \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{t^2+1}\right)b_n$$

$$b_{n+1} = \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{t^2+1}\right)a_n + \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{t^2+1}\right)b_n$$

(1) a_n を $a,\ b,\ t,\ n$ を用いて表せ。

(2) $n \to \infty$ とするとき，a_n が収束するための $a,\ b,\ t$ についての必要十分条件を求めよ。

☆ ☆

(1) $a_{n+1} = \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{t^2+1}\right)a_n + \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{t^2+1}\right)b_n$ …①

$b_{n+1} = \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{t^2+1}\right)a_n + \left(\frac{t}{2} + \frac{5}{t^2+1}\right)b_n$ …②

①＋②より　$a_{n+1} + b_{n+1} = t\left(a_n + b_n\right)$

よって $\{a_n + b_n\}$ は等比数列なので　$a_n + b_n = t^{n-1}(a_1 + b_1) = t^{n-1}(a+b)$ …③

①－②より　$a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{10}{t^2+1}\left(a_n - b_n\right)$

よって $\{a_n - b_n\}$ は等比数列なので　$a_n - b_n = \left(\dfrac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}(a_1 - b_1) = \left(\dfrac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}(a-b)$ …④

（③＋④）÷2 より　$a_n = \dfrac{1}{2}\left\{t^{n-1}(a+b) + \left(\dfrac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}(a-b)\right\}$

(2)（i）$(0<)\left(\dfrac{10}{t^2+1}\right)^{n-1} \leqq 1$　となるのは

$10 \leqq t^2+1 \Leftrightarrow t^2 \geqq 9 \Leftrightarrow t \leqq -3,\ 3 \leqq t$　のときで，

このとき，a_n が収束するための必要十分条件は

$t^{n-1}(a+b)$ が収束することであり，$a+b=0$ である。

（ⅱ）$-3<t<3$ のとき

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}\left\{(a+b)\left(\frac{t^3+t}{10}\right)^{n-1}+a-b\right\}$$ と変形できる。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10}{t^2+1}\right)^{n-1}=\infty$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{(a+b)\left(\frac{t^3+t}{10}\right)^{n-1}+a-b\right\}=0$ でなければならない。

ここで，$\dfrac{t^3+t}{10}$ について考える。

（ⅱ－１）$\left|\dfrac{t^3+t}{10}\right|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{(a+b)\left(\frac{t^3+t}{10}\right)^{n-1}+a-b\right\}=a-b$ となるが，

$a\geqq 0>b$ より $a-b=0$ とはならない。

（ⅱ－２）$\dfrac{t^3+t}{10}>1$ または $\dfrac{t^3+t}{10}\leqq -1$ のとき

$a+b=0$ であることが必要で，このとき $(a+b)\left(\dfrac{t^3+t}{10}\right)^{n-1}+a-b=a-b$ となるが，

$a\geqq 0>b$ より $a-b=0$ とはならない。

（ⅲ－３）$\dfrac{t^3+t}{10}=1$ のとき

$t^3+t-10=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t+5)=0$ であり，

$t=2$（これは $-3<t<3$ を満たす）となる。

このとき，$(a+b)\left(\dfrac{t^3+t}{10}\right)^{n-1}+a-b=2a$ となるので，

$a=0$ であることが必要である。

逆に，$t=2,\ a=0$ のとき，$a_n=0$ となり，十分でもある。

よって，求める必要十分条件は

「$a+b=0$ かつ（$t\leqq -3$ または $t\geqq 3$）」 または 「$a=0$ かつ $t=2$」