[東京工業大学 2010 年前期 $\boxed{1}$]

$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ とする。

(1) $0<x<\pi$ において，$f(x)=0$ は唯一の解を持つことを示せ。

(2) $J=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx$ とする。(1)の唯一の解を α とするとき，J を $\sin\alpha$ の式で表せ。

(3) (2)で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ。

---

(1) $f'(x)=\sin x-(\sin x+x\cos x)$

$=-x\cos x$

であり，増減表は右の通り。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$1-\dfrac{\pi}{2}$	$\nearrow$	2

$f(0)=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\dfrac{\pi}{2}<0$，$f(\pi)=2>0$ であり，

$f(x)$ は，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で単調減少，$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ で単調増加であるから $0<\left(\dfrac{\pi}{2}<\right)x<\pi$ において

$f(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在する。

(2) (1)より，$0<x<\alpha$ のとき $f(x)<0$，$\alpha<x<\pi$ のとき $f(x)>0$ であるから，

$J=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx=\int_0^{\alpha}\{-f(x)\}\,dx+\int_{\alpha}^{\pi}f(x)\,dx$ である。

ここで，$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると，部分積分によって

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int(1-\cos x-x\sin x)\,dx=x-\sin x+x\cos x-\sin x$

$=x(1+\cos x)-2\sin x$ である。

よって，$J=-F(\alpha)+F(0)+F(\pi)-F(\alpha)$

$=F(0)+F(\pi)-2F(\alpha)$

$=-2\{\alpha(1+\cos\alpha)-2\sin\alpha\}$

$=2\{2\sin\alpha-\alpha(1+\cos\alpha)\}$ となるが，

$f(\alpha)=1-\cos\alpha-\alpha\sin\alpha=0$ であり，

$0<\alpha<\pi$ において $\sin\alpha\neq 0$ であるから $\alpha=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ なので，

$$J=2\left\{2\sin\alpha-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot(1+\cos\alpha)\right\}$$

$$=2\left(2\sin\alpha-\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$=2\left(2\sin\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$=2\sin\alpha$$

となる。

(3) $2\sin\dfrac{3}{4}\pi=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ であるから，α と $\dfrac{3}{4}\pi$ の大小を比較する。

$f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{3}{4}\pi\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}+4-3\pi}{4\sqrt{2}}$ であり，

$4\sqrt{2}+4>4\times1.4+4=9.6=3\times3.2>3\pi$ であるから $f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)>0$ である。

よって $f(\alpha)=0$ なので，$\left(\dfrac{\pi}{2}<\right)\alpha<\dfrac{3}{4}\pi$ であるから，$J=2\sin\alpha>2\sin\dfrac{3}{4}\pi=\sqrt{2}$

したがって $J>\sqrt{2}$

[注] (3)の $f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)>0$ については，次のように示すこともできる。

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{4}\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi$$

$$>\frac{2+\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{8}\times\frac{32}{10}=\frac{10-7\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{100}-\sqrt{98}}{10}>0$$

[東京工業大学 2010 年前期 $\boxed{2}$]

a を正の整数とする。正の実数 x についての方程式

$$(\ast)\qquad x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$$

が解を持たないような a を小さい順に並べたものを $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ とする。ここに $[\quad]$ はガウス記号で，

実数 u に対し，$[\,u\,]$ は u 以下の最大の整数を表す。

(1) $a=7,\ 8,\ 9$ の各々について（$\ast$）の解があるかどうかを判定し，ある場合は解 x を求めよ。

(2) $a_1,\ a_2$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ を求めよ。

---

(1) （$\ast$）より，x は正の整数である。

$x \leqq \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)<x+1$ であり，辺々に $2x$ をかけて $2x^2 \leqq x^2+a<2x^2+2x$

$$x^2 \leqq a<x^2+2x$$

すなわち $x^2 \leqq a \leqq x^2+2x-1=(x+1)^2-2$ を得る。

定数 a に対し，この不等式を満たす x が方程式（$\ast$）の解である。

$a=7$ のとき，$2^2 \leqq 7 \leqq (2+1)^2-2$ より $x=2$ が解として存在する。

$a=8$ のとき，$x^2 \leqq 8 \leqq (x+1)^2-2$ を満たす正の整数は存在しない。

$a=9$ のとき，$3^2 \leqq 9 \leqq (3+1)^2-2$ より $x=3$ が解として存在する。

(2) 不等式 $x^2 \leqq a \leqq (x+1)^2-2$ を満たす a は

$a=x^2,\ x^2+1,\ x^2+2,\ \cdots,\ x^2+2x-1$ であり，すべての正の整数 x を考えたとき，

「$a=$（平方数）-1」を満たす a に対しては，この不等式を満たす x が存在しない。

よって，$a_n=(n+1)^2-1\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるから $a_1=3,\ a_2=8$

(3) $a_n=(n+1)^2-1=n(n+2)$ であるから，

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

[注] (2)は次のようにしてもよい。

a, x は正の整数であるから

$x^2 \leqq a < x^2+2x \iff x^2 < a+1 < (x+1)^2$ …① である。

①の左辺，右辺は隣り合う正の平方数であるから，（＊）が解をもたないのは

$a+1$ が 2 以上の平方数のときである。

よって，$a_n=(n+1)^2-1 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$ となる。

[東京工業大学 2010 年前期 $\boxed{3}$]

☆───────────────────────────☆

1からnまでの数字がもれなく一つずつ書かれたn枚のカードの束から同時に2枚のカードを引く。このとき，引いたカードの数字のうち，小さい方が 3 の倍数である確率を $p(n)$ とする。

(1) $p(8)$ を求めよ。

(2) 正の整数kに対し， $p(3k+2)$ をkで表せ。

☆───────────────────────────☆

(1) 8 枚のカードの束から同時に 2 枚のカードを引く場合の数は ${}_8\mathrm{C}_2=\dfrac{8\cdot 7}{2\cdot 1}=28$ 通り

あり，これらの引き方は同様に確からしい。

2 枚のカードのうち，小さい方が 3 の倍数であるのは,

「3－4，5，6，7，8」の 5 通り,「6－7，8」 の 2 通りを合わせて 7 通りであるから

求める確率は $p(8)=\dfrac{7}{28}=\dfrac{1}{4}$

(2) カードの引き方の総数は ${}_{3k+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{(3k+2)(3k+1)}{2}$ 通り

あり，これらは同様に確からしい。

これらのうち，引いたカードの数字のうち小さい方が3の倍数であるのは

小さい方の数字が 3 であるとき $(3k+2)-3=3k-1$ 通り

6 であるとき $(3k+2)-6=3k-4$ 通り

$\vdots$

$3k$ であるとき $(3k+2)-3k=2$ 通り

であるから，合わせて $\dfrac{k\{(3k-1)+2\}}{2}=\dfrac{k(3k+1)}{2}$ 通り

よって，求める確率は $\dfrac{\dfrac{k(3k+1)}{2}}{\dfrac{(3k+2)(3k+1)}{2}}=\dfrac{k}{3k+2}$

[東京工業大学 2010 年前期 $\boxed{4}$]

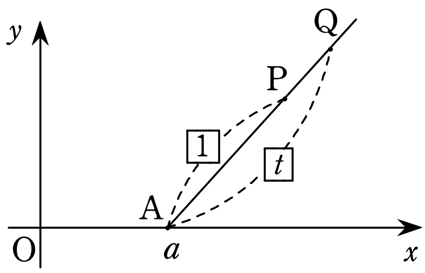
☆────────────────────────────────────☆

a を正の定数とする。原点を O とする座標平面上に定点 $\mathrm{A}=\mathrm{A}(a,\ 0)$ と，A と異なる動点 $\mathrm{P}=\mathrm{P}(x,\ y)$ をとる。次の条件

A から P に向けた半直線上の点 Q に対し $\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}}\leqq 2$ ならば $\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}}\leqq\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}}$

を満たす P からなる領域を D とする。D を図示せよ。

☆────────────────────────────────────☆



A から P に向けた半直線上にあり，$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}}\leqq 2$ を満たす点 Q は，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ …① （$0\leqq t\leqq 2$ …②）

とおける。

このとき，$0\leqq t\leqq 2$ を満たすすべての t に対して $\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}}\leqq\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}}$ となる条件を求めればよい。

$\mathrm{QP}=|t-1|\,\mathrm{AP}$ であるから

$\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}}\leqq\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}} \Leftrightarrow \dfrac{|t-1|}{\mathrm{OQ}}\leqq\dfrac{1}{a}$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Q}\neq\mathrm{O}$ …③ かつ $a|t-1|\leqq\mathrm{OQ}$ …④ であり，

$\mathrm{Q}=\mathrm{O}$ となり得るのは，P が x 軸上の $x\leqq\dfrac{a}{2}$ の範囲にあるとき …⑤ であるから

③を満たすために，⑤ではない場合を考えればよい。

①のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(a+t(x-a),\ ty)$ である。

そして，$\mathrm{OQ}^2=\{a+t(x-a)\}^2+(ty)^2$

$=\{(x-a)^2+y^2\}t^2+2a(x-a)t+a^2$ であるから

④ $\Leftrightarrow$ $a^2(t-1)^2\leqq\mathrm{OQ}^2$

$\Leftrightarrow$ $a^2(t-1)^2\leqq\{(x-a)^2+y^2\}t^2+2a(x-a)t+a^2$

$\Leftrightarrow$ $(x^2+y^2-2ax)t^2+2axt\geqq 0$ …⑥ となるが

$t=0$ のとき ③は成り立つ。

よって，②を満たすすべての t に対して⑥が成り立つ

$\Leftrightarrow$ $0<t\leqq 2$ を満たすすべての t に対して $(x^2+y^2-2ax)t+2ax\geqq 0$

$\Leftrightarrow$ $f(t)=(x^2+y^2-2ax)t+2ax$ に対して，$f(t)$ は t の 1 次関数であることから

$f(0)\geqq 0$ かつ $f(2)\geqq 0$

$\Leftrightarrow$ $2ax\geqq 0$ かつ $2(x^2+y^2-ax)\geqq 0$

$\Leftrightarrow$ $x\geqq 0$ かつ $x^2+y^2-ax\geqq 0$ …⑦

以上から，求める領域 D は

「$\mathrm{P}\neq\mathrm{A}$」 かつ「⑤ではない」かつ「⑦」

であり，図示すると右図の網目部分となる。

ただし，境界は $(0, 0)$，$(a, 0)$ を除いてすべて含む。