[東京工業大学 2010 年前期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ とする。

(1) $0<x<\pi$ において，$f(x)=0$ は唯一の解を持つことを示せ。

(2) $J=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx$ とする。(1)の唯一の解を α とするとき，J を $\sin\alpha$ の式で表せ。

(3) (2)で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ。

☆ ☆

［ 東京工業大学 2010 年前期 $\boxed{2}$ ］

a を正の整数とする。正の実数 x についての方程式

$$（＊）\qquad x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$$

が解を持たないような a を小さい順に並べたものを $a_1, a_2, a_3, \cdots$ とする。ここに $[\quad]$ はガウス記号で，実数 u に対し，$[\,u\,]$ は u 以下の最大の整数を表す。

(1) $a=7, 8, 9$ の各々について（＊）の解があるかどうかを判定し，ある場合は解 x を求めよ。

(2) a_1, a_2 を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ を求めよ。

[東京工業大学 2010 年前期 $\boxed{3}$]

1 から n までの数字がもれなく一つずつ書かれた n 枚のカードの束から同時に 2 枚のカードを引く。このとき，引いたカードの数字のうち，小さい方が 3 の倍数である確率を $p(n)$ とする。

(1) $p(8)$ を求めよ。

(2) 正の整数 k に対し， $p(3k+2)$ を k で表せ。

[東京工業大学 2010 年前期 $\boxed{4}$]

a を正の定数とする。原点を O とする座標平面上に定点 $\mathrm{A} = \mathrm{A}(a,\ 0)$ と，A と異なる動点 $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x,\ y)$ をとる。次の条件

$$\text{A から P に向けた半直線上の点 Q に対し } \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}} \leqq 2 \text{ ならば } \frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}} \leqq \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}}$$

を満たす P からなる領域を D とする。D を図示せよ。