[東京工業大学 2010 年前期 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

1から n までの数字がもれなく一つずつ書かれた n 枚のカードの束から同時に2枚のカードを引く。このとき，引いたカードの数字のうち，小さい方が 3 の倍数である確率を $p(n)$ とする。

(1) $p(8)$ を求めよ。

(2) 正の整数 k に対し，$p(3k+2)$ を k で表せ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 8 枚のカードの束から同時に 2 枚のカードを引く場合の数は ${}_8\mathrm{C}_2=\dfrac{8\cdot 7}{2\cdot 1}=28$ 通り

あり，これらの引き方は同様に確からしい。

2 枚のカードのうち，小さい方が 3 の倍数であるのは,

「3－4，5，6，7，8」の 5 通り,「6－7，8」 の 2 通りを合わせて 7 通りであるから

求める確率は $p(8)=\dfrac{7}{28}=\dfrac{1}{4}$

(2) カードの引き方の総数は ${}_{3k+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{(3k+2)(3k+1)}{2}$ 通り

あり，これらは同様に確からしい。

これらのうち，引いたカードの数字のうち小さい方が3の倍数であるのは

小さい方の数字が 3 であるとき $(3k+2)-3=3k-1$ 通り

6 であるとき $(3k+2)-6=3k-4$ 通り

$\vdots$

$3k$ であるとき $(3k+2)-3k=2$ 通り

であるから，合わせて $\dfrac{k\{(3k-1)+2\}}{2}=\dfrac{k(3k+1)}{2}$ 通り

よって，求める確率は $\dfrac{\dfrac{k(3k+1)}{2}}{\dfrac{(3k+2)(3k+1)}{2}}=\dfrac{k}{3k+2}$