[東京工業大学 2010 年前期 $\boxed{2}$]

a を正の整数とする。正の実数 x についての方程式

$$(\ast) \qquad x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$$

が解を持たないような a を小さい順に並べたものを $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ とする。ここに$[\quad]$はガウス記号で，

実数 u に対し，$[\,u\,]$ は u 以下の最大の整数を表す。

(1) $a=7,\ 8,\ 9$ の各々について（＊）の解があるかどうかを判定し，ある場合は解 x を求めよ。

(2) $a_1,\ a_2$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ を求めよ。

---

(1) （＊）より，x は正の整数である。

$x \leqq \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right) < x+1$ であり，辺々に $2x$ をかけて $2x^2 \leqq x^2+a < 2x^2+2x$

$$x^2 \leqq a < x^2+2x$$

すなわち $x^2 \leqq a \leqq x^2+2x-1=(x+1)^2-2$ を得る。

定数 a に対し，この不等式を満たす x が方程式（＊）の解である。

$a=7$ のとき，$2^2 \leqq 7 \leqq (2+1)^2-2$ より $x=2$ が解として存在する。

$a=8$ のとき，$x^2 \leqq 8 \leqq (x+1)^2-2$ を満たす正の整数は存在しない。

$a=9$ のとき，$3^2 \leqq 9 \leqq (3+1)^2-2$ より $x=3$ が解として存在する。

(2) 不等式 $x^2 \leqq a \leqq (x+1)^2-2$ を満たす a は

$a=x^2,\ x^2+1,\ x^2+2,\ \cdots,\ x^2+2x-1$ であり，すべての正の整数 x を考えたとき，

「$a=$（平方数）-1」を満たす a に対しては，この不等式を満たす x が存在しない。

よって，$a_n=(n+1)^2-1 \ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるから $a_1=3,\ a_2=8$

(3) $a_n=(n+1)^2-1=n(n+2)$ であるから，

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

[注] (2)は次のようにしてもよい。

a, x は正の整数であるから

$x^2\leqq a<x^2+2x \iff x^2<a+1<(x+1)^2$ …① である。

①の左辺，右辺は隣り合う正の平方数であるから，（＊）が解をもたないのは

$a+1$ が 2 以上の平方数のときである。

よって，$a_n=(n+1)^2-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となる。