[東京工業大学 2010 年前期 $\boxed{1}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ とする。

(1) $0<x<\pi$ において, $f(x)=0$ は唯一の解を持つことを示せ。

(2) $J=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx$ とする。(1)の唯一の解を α とするとき, J を $\sin\alpha$ の式で表せ。

(3) (2)で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $f'(x)=\sin x-(\sin x+x\cos x)$

$=-x\cos x$

であり, 増減表は右の通り。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$1-\frac{\pi}{2}$	↗	2

$f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{2}<0$, $f(\pi)=2>0$ であり,

$f(x)$ は, $0<x<\frac{\pi}{2}$ で単調減少, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ で単調増加であるから $0<\left(\frac{\pi}{2}<\right)x<\pi$ において

$f(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在する。

(2) (1)より, $0<x<\alpha$ のとき $f(x)<0$, $\alpha<x<\pi$ のとき $f(x)>0$ であるから,

$J=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx=\int_0^{\alpha}\{-f(x)\}\,dx+\int_{\alpha}^{\pi}f(x)\,dx$ である。

ここで, $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると, 部分積分によって

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int(1-\cos x-x\sin x)\,dx=x-\sin x+x\cos x-\sin x$

$=x(1+\cos x)-2\sin x$ である。

よって, $J=-F(\alpha)+F(0)+F(\pi)-F(\alpha)$

$=F(0)+F(\pi)-2F(\alpha)$

$=-2\{\alpha(1+\cos\alpha)-2\sin\alpha\}$

$=2\{2\sin\alpha-\alpha(1+\cos\alpha)\}$ となるが,

$f(\alpha)=1-\cos\alpha-\alpha\sin\alpha=0$ であり，

$0<\alpha<\pi$ において $\sin\alpha\neq 0$ であるから $\alpha=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ なので，

$$J=2\left\{2\sin\alpha-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot(1+\cos\alpha)\right\}$$

$$=2\left(2\sin\alpha-\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$=2\left(2\sin\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$=2\sin\alpha$$

となる。

(3) $2\sin\dfrac{3}{4}\pi=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ であるから，α と $\dfrac{3}{4}\pi$ の大小を比較する。

$f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{3}{4}\pi\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}+4-3\pi}{4\sqrt{2}}$ であり，

$4\sqrt{2}+4>4\times1.4+4=9.6=3\times3.2>3\pi$ であるから $f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)>0$ である。

よって $f(\alpha)=0$ なので，$\left(\dfrac{\pi}{2}<\right)\alpha<\dfrac{3}{4}\pi$ であるから，$J=2\sin\alpha>2\sin\dfrac{3}{4}\pi=\sqrt{2}$

したがって $J>\sqrt{2}$

[注] (3)の $f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)>0$ については，次のように示すこともできる。

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{4}\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi$$

$$>\frac{2+\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{8}\times\frac{32}{10}=\frac{10-7\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{100}-\sqrt{98}}{10}>0$$