[東京工業大学 2009 年 第 1 類特別入試 $\boxed{1}$]

この試験は現時点での諸君の論理的理解力の習熟度を測るためのものであり，乱雑に書かれているのではその役に立ちません。できるだけ丁寧な字で，採点員が論理を追い易いように各自工夫し，結論ははっきりと記述して下さい。

$f_1(x)=\pi\sin x$ とし，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対して，$f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x))$ で関数の列 $f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \cdots$ を定める。このとき，区間 $0<x<\pi$ において $f_n(x)$ が極値をとるような x の個数を n で表せ。

$f_{n+1}(x)=f_1\left(f_n(x)\right)=\pi\sin f_n(x)$

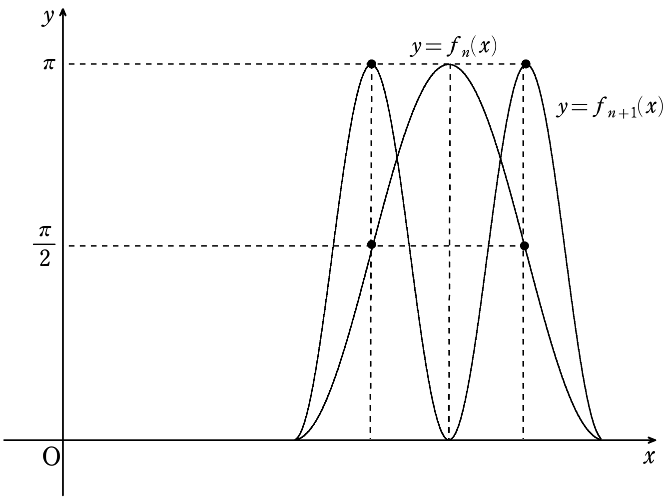
より，ある区間で $f_n(x)$ が「 0 → 増加 → π → 減少 → 0 」（山 1 個分）と変化すると，

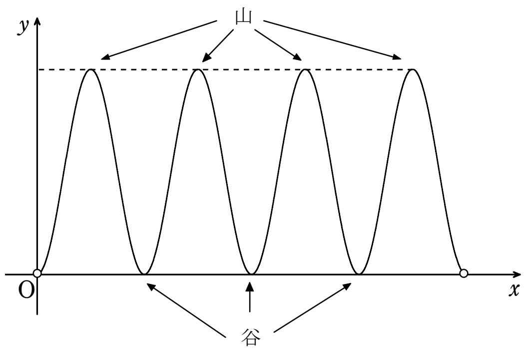
$f_{n+1}(x)$ は表のように変化する。このときの変化によるグラフの山は 2 個分である。

f_n	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↘	$\frac{\pi}{2}$	↘	0
f_{n+1}	0	↗	π	↘	0	↗	π	↘	0

いま，$f_1(x)$ （$0\leqq x\leqq\pi$ ）は山 1 個からなるので，

帰納的に $f_n(x)$ は山 2^{n-1} 個からなる …①





$f_n(x)$ が「 減少 → 0 → 増加 」と変化する部分を「谷 1 個」とすると，

$f_n(x)$ （$0<x<\pi$ ）が極値をとる x は，この区間の山と谷（$x=0,\ \pi$ の近くは除く）の総数となる。

①より 山は 2^{n-1} 個，谷は $2^{n-1}-1$ 個あるので，求める個数は $2^{n-1}+2^{n-1}-1=2^n-1$ 個

[**東京工業大学 2009 年 第 1 類特別入試 $\boxed{2}$**]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

漸化式 $c_{n+1}=8c_n-7\ \ (n=1, 2, 3, \cdots)$ を満たす数列 $c_1, c_2, c_3, \cdots$ を考える。数列 $c_1, c_2, c_3, \cdots$ に素数がただ 1 つだけ現れるような正の整数 c_1 を 2 つ求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$c_{n+1}=8c_n-7$ …①

（ⅰ）$c_1=7$ とする。

$n\geqq 2$ のとき，$c_n=7\ell$（ℓ は 2 以上の整数）と表せる …②

ということを数学的帰納法で示す。

$c_2=8\cdot 7-7=7^2$ より $n=2$ で②は成り立つ。

$n=k\ (\geqq 2)$ のとき②が成り立つとすると

$c_k=7\ell$（ℓ は 2 以上の整数）とおける。

①より $c_{k+1}=8c_k-7=8\cdot 7\ell-7=7(8\ell-1)$

$8\ell-1\geqq 2$ より $n=k+1$ のときも②は成り立つ。

よって，②は成り立つ。

したがって $c_1=7$ 以外の c_n は合成数となり，$c_1=7$ は答えの 1 つである。

（ⅱ）① $\Leftrightarrow$ $c_{n+1}-1=8(c_n-1)$ $\Leftrightarrow$ $c_n-1=8^{n-1}(c_1-1)$ $\Leftrightarrow$ $c_n=(c_1-1)2^{3(n-1)}+1$ である。

ここで，$c_1-1=1$ とすると

$c_n=2^{3(n-1)}+1=\left(2^{n-1}+1\right)\left(2^{2(n-1)}-2^{n-1}+1\right)$

となり，$n\geqq 2$ では $2^{n-1}+1\geqq 3$，$2^{2(n-1)}-2^{n-1}+1=2^{n-1}\left(2^{n-1}-1\right)+1\geqq\left(2-1\right)+1=3$

であるから，$c_1=2$ 以外の c_n は合成数となる。

よって，求める正の整数 c_1 は $c_1=2, 7$

[東京工業大学 2009 年 第 1 類特別入試 $\boxed{3}$]

自然数 n に対し，第 1 象限において不等式

$$nx \geqq y \geqq x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{3}x^{n-2} + \cdots + \frac{1}{n}x + \frac{1}{n+1}$$

の表す領域を $S(n)$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S(n)$ を求めよ。

$n > 2$ とする。 $f(x) = x^n + \dfrac{1}{2}x^{n-1} + \dfrac{1}{3}x^{n-2} + \cdots + \dfrac{1}{n}x + \dfrac{1}{n+1}$ とおく。

$f(x)$ の係数はすべて正なので， $f'(x)$， $f''(x)$ の係数もすべて正となる。

よって， $x > 0$ において $f(x)$ は単調増加で下に凸である。

したがって，第 1 象限における $y = f(x)$ と直線 $y = nx$ の交点は高々 2 個である。

$g(x) = nx - f(x)$ とおくと， $g(0) = -\dfrac{1}{n+1} < 0$

$an^k \geqq n^k \geqq n^2 > 2n > n+1$（$a$ は自然数， $k \geqq 2$）より

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \left(\frac{1}{n^n} + \frac{1}{2n^{n-1}} + \frac{1}{3n^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$> 1 - \left(\underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}}_{n+1\text{個}}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}\cdot(n+1) = 0$$

$$g(1) = n - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$> n - \left(1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{n\text{個}}\right)$$

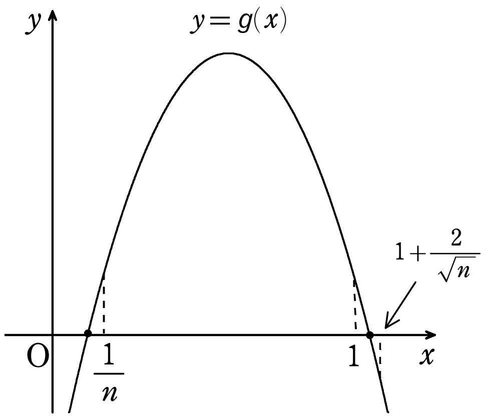
$$= n - 1 - \frac{1}{2}\cdot n$$

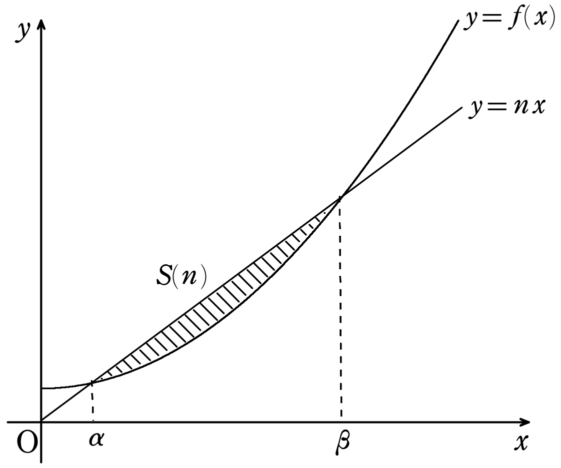
$$= \frac{n}{2} - 1 > 0$$

$x>0$ のとき， $f(x)>x^n$ より $g(x)<nx-x^n$ であるから， $d>0$ として二項定理より

$$g(1+d)<n(1+d)-(1+d)^n<n(1+d)-\left(1+nd+{}_n\mathrm{C}_2d^2\right)=(n-1)\left(1-\frac{n}{2}d^2\right)$$

よって， $g\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)<(n-1)(1-2)<0$ となる。





したがって， $y=f(x)$ と $y=nx$ の交点は 2 個あり， x 座標を α,β $(\alpha<\beta)$ とすると，

$0<\alpha<\dfrac{1}{n}, 1<\beta<1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ である。

したがって，
$$\frac{1}{n}S(n)=\frac{1}{n}\int_\alpha^\beta\{nx-f(x)\}dx$$
$$=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}-\frac{1}{n}\left(\int_0^\beta f(x)dx-\int_0^\alpha f(x)dx\right)$$
$$=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}-\frac{1}{n}\int_0^\beta f(x)dx+\frac{1}{n}\int_0^\alpha f(x)dx$$

$0\leqq x\leqq\alpha$ において $0\leqq f(x)\leqq f(\alpha)=n\alpha$ であるから

$$0\leqq\frac{1}{n}\int_0^\alpha f(x)dx\leqq\frac{1}{n}\int_0^\alpha n\alpha\,dx=\alpha^2<\frac{1}{n^2}\xrightarrow{n\to\infty}0 \text{ より } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^\alpha f(x)dx=0$$

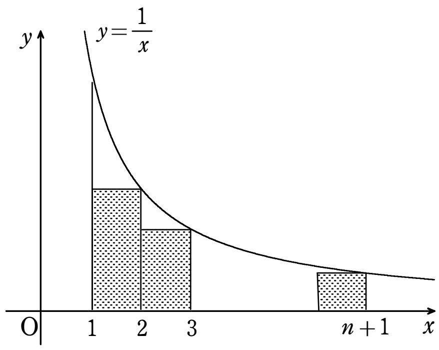
さらに， $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^\beta f(x)dx=\dfrac{1}{n}\int_0^1 f(x)dx+\dfrac{1}{n}\int_1^\beta f(x)dx$ であり，

$1\leqq x\leqq\beta$ において $0\leqq f(x)\leqq f(\beta)=n\beta$ であるから

$$0\leqq\frac{1}{n}\int_1^\beta f(x)dx\leqq\frac{1}{n}\int_0^\beta n\beta\,dx=\beta(\beta-1)<\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}\xrightarrow{n\to\infty}0 \text{ より } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^\beta f(x)dx=0$$

$0\leqq x\leqq1$ において $0\leqq f(x)\leqq f(1)$ であるから

$$0\leqq\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)dx\leqq\frac{1}{n}\int_0^1 f(1)dx=\frac{f(1)}{n}$$



図において面積を評価すると　$f(1)=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n+1} \leqq 1+\displaystyle\int_1^{n+1}\dfrac{1}{x+1}\,dx=1+\log(n+1)$　なので

$0 \leqq \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leqq \dfrac{1+\log(n+1)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$　より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\int_0^{\beta} f(x)\,dx=0$　である。

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}S(n)=\dfrac{1-0}{2}-0+0=\dfrac{1}{2}$

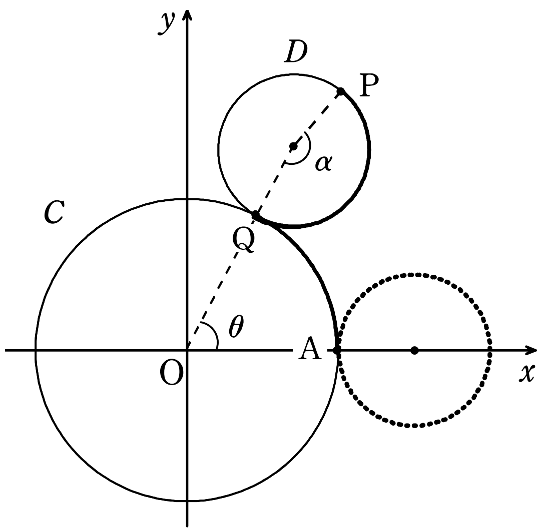
[東京工業大学 2009 年 第 1 類特別入試 $\boxed{4}$]

半径 R の定円 C がある。半径 r の円板 D が，円 C に外接しながら一定の速さですべることなくころがっている。円板 D の周上の一点を P とするとき， P の速度ベクトルが $\vec{0}$ となる場所が有限個であるための必要十分条件を求めよ。

xy 平面上で $C: x^2+y^2=R^2$ とする。

D は中心 $\mathrm{O'}$ が x 上にあるときからころがり始め，

このときの P は $\mathrm{A}(R,\,0)$ にあるとしても一般性を失わない。



C と D の接点を Q とし，ころがり始めてからの Q の回転角 $\angle\mathrm{AOQ}$ を θ とする。

$\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}=\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}=R\theta$ であるから $\angle\mathrm{QO'P}=\dfrac{R}{r}\theta$ （$=\alpha$ とおく），

f を α 回転を表す 1 次変換とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+f\left(\overrightarrow{\mathrm{O'Q}}\right)$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}-rf\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$=(R+r)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}-r\begin{pmatrix}\cos(\theta+\alpha)\\ \sin(\theta+\alpha)\end{pmatrix}$$

この x 成分， y 成分はそれぞれ

$$x=(R+r)\cos\theta-r\cos\frac{R+r}{r}\theta$$

$$y=(R+r)\sin\theta-r\sin\frac{R+r}{r}\theta$$

であり，

$$\frac{dx}{d\theta}=-(R+r)\sin\theta+(R+r)\sin\frac{R+r}{r}\theta=2(R+r)\left(\cos\frac{R+2r}{2r}\theta\right)\left(\sin\frac{R}{2r}\theta\right)\quad\cdots①$$

$$\frac{dy}{d\theta}=(R+r)\cos\theta-(R+r)\cos\frac{R+r}{r}\theta=2(R+r)\left(\sin\frac{R+2r}{2r}\theta\right)\left(\sin\frac{R}{2r}\theta\right)\quad\cdots②$$

ここで，「Pの速度ベクトルが$\vec{0}$となる」 $\Leftrightarrow$ 「$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{dy}{d\theta}=0$ 」…③ であることと

$\cos A=\sin A=0$ となる実数Aが存在しないことから

①，②より ③ $\Leftrightarrow$ $\sin\dfrac{R}{2r}\theta=0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{R}{2r}\theta=k\pi$ （kは非負整数）

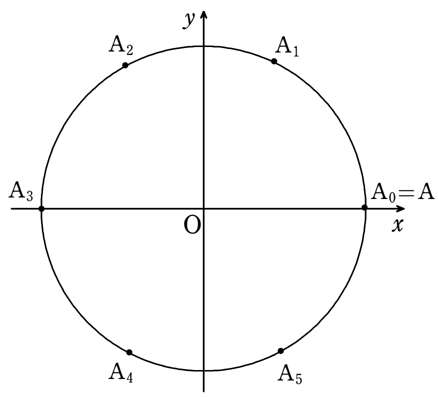
$\Leftrightarrow$ $\theta=\dfrac{r}{R}\cdot 2k\pi$ …④

$\Leftrightarrow$ $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}=\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}=R\theta=2\pi r\times k$ ＝（Dの円周の整数倍）

これは $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ すなわち，C上に点Pがある …（＊）ことを意味している。

④を満たすPをA_k（$\mathrm{A}_0=\mathrm{A}$）とする。

（＊）を満たすPが有限個であるとすると，ある非負整数$i,\ j$（$i<j$）に対して$\mathrm{A}_i=\mathrm{A}_j$である。



よって $\angle\mathrm{A}_i\mathrm{OA}_j=\angle\mathrm{AOA}_j-\angle\mathrm{AOA}_i=2\pi\times$（整数）

$\dfrac{r}{R}\cdot 2j\pi-\dfrac{r}{R}\cdot 2i\pi=2\pi\times$（整数）

$\dfrac{r}{R}=$（整数）÷（$j-i$）＝（有理数）

逆に，$\dfrac{r}{R}$が有理数であるとすると，$\dfrac{n}{m}$（$m,\ n$は自然数）とおける。

④で$k=m$とすると $\angle\mathrm{AOA}_m=2n\pi$ であるから，$\mathrm{A}_m=\mathrm{A}_0$ である。

よって，（＊）を満たすPは多くとも $\mathrm{A}_0,\cdots,\mathrm{A}_{m-1}$ のm個で，有限個。

以上より，求める必要十分条件は $\dfrac{r}{R}$が有理数であることである。