[東京工業大学 2009 年 第 1 類特別入試 $\boxed{1}$]

　この試験は現時点での諸君の論理的理解力の習熟度を測るためのものであり，乱雑に書かれているのではその役に立ちません。できるだけ丁寧な字で，採点員が論理を追い易いように各自工夫し，結論ははっきりと記述して下さい。

$f_1(x) = \pi \sin x$ とし，$n = 2, 3, 4, \cdots$ に対して，$f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$ で関数の列 $f_2(x), f_3(x), f_4(x), \cdots$ を定める。このとき，区間 $0 < x < \pi$ において $f_n(x)$ が極値をとるような x の個数を n で表せ。

[東京工業大学 2009 年 第 1 類特別入試 $\boxed{2}$]

漸化式 $c_{n+1} = 8c_n - 7 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす数列 $c_1, c_2, c_3, \cdots$ を考える。数列 $c_1, c_2, c_3, \cdots$ に素数がただ 1 つだけ現れるような正の整数 c_1 を 2 つ求めよ。

[東京工業大学 2009 年 第 1 類特別入試 $\boxed{3}$]

自然数 n に対し，第 1 象限において不等式

$$nx \geqq y \geqq x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{3}x^{n-2} + \cdots + \frac{1}{n}x + \frac{1}{n+1}$$

の表す領域を $S(n)$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S(n)$ を求めよ。

[東京工業大学 2009 年 第 1 類特別入試 $\boxed{4}$]

半径 R の定円 C がある。半径 r の円板 D が，円 C に外接しながら一定の速さですべることなくころがっている。円板 D の周上の一点を P とするとき，P の速度ベクトルが $\vec{0}$ となる場所が有限個であるための必要十分条件を求めよ。