[東京工業大学 2009 年 第 1 類特別入試 $\boxed{4}$]

☆――――☆

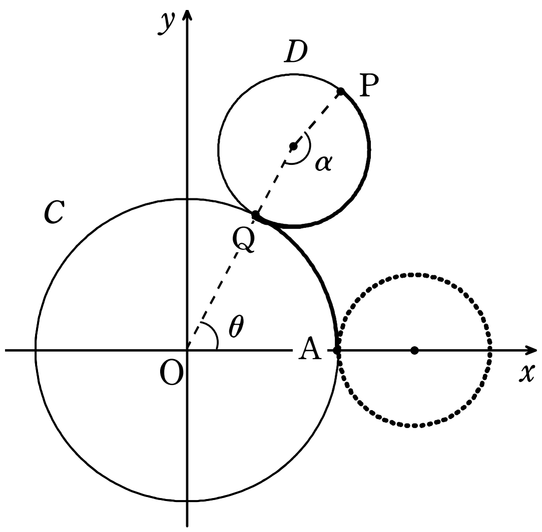
半径 R の定円 C がある。半径 r の円板 D が，円 C に外接しながら一定の速さですべることなくころがっている。円板 D の周上の一点を P とするとき，P の速度ベクトルが $\vec{0}$ となる場所が有限個であるための必要十分条件を求めよ。

☆――――☆

xy 平面上で $C: x^2+y^2=R^2$ とする。

D は中心 $\mathrm{O'}$ が x 上にあるときからころがり始め，

このときの P は $\mathrm{A}(R,\ 0)$ にあるとしても一般性を失わない。



C と D の接点を Q とし，ころがり始めてからの Q の回転角 $\angle\mathrm{AOQ}$ を θ とする。

$\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}=\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}=R\theta$ であるから $\angle\mathrm{QO'P}=\dfrac{R}{r}\theta$ （$=\alpha$ とおく），

f を α 回転を表す 1 次変換とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+f\left(\overrightarrow{\mathrm{O'Q}}\right)$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}-rf\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$=(R+r)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}-r\begin{pmatrix}\cos(\theta+\alpha)\\ \sin(\theta+\alpha)\end{pmatrix}$$

この x 成分，y 成分はそれぞれ

$$x=(R+r)\cos\theta-r\cos\frac{R+r}{r}\theta$$

$$y=(R+r)\sin\theta-r\sin\frac{R+r}{r}\theta$$

であり，

$$\frac{dx}{d\theta}=-(R+r)\sin\theta+(R+r)\sin\frac{R+r}{r}\theta=2(R+r)\left(\cos\frac{R+2r}{2r}\theta\right)\left(\sin\frac{R}{2r}\theta\right)\ \cdots①$$

$$\frac{dy}{d\theta}=(R+r)\cos\theta-(R+r)\cos\frac{R+r}{r}\theta=2(R+r)\left(\sin\frac{R+2r}{2r}\theta\right)\left(\sin\frac{R}{2r}\theta\right)\ \cdots②$$

ここで，「Pの速度ベクトルが$\vec{0}$となる」 $\Leftrightarrow$ 「$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dy}{d\theta}=0$ 」…③ であることと

$\cos A=\sin A=0$ となる実数Aが存在しないことから

①，②より ③ $\Leftrightarrow$ $\sin\frac{R}{2r}\theta=0$

$\Leftrightarrow$ $\frac{R}{2r}\theta=k\pi$ （kは非負整数）

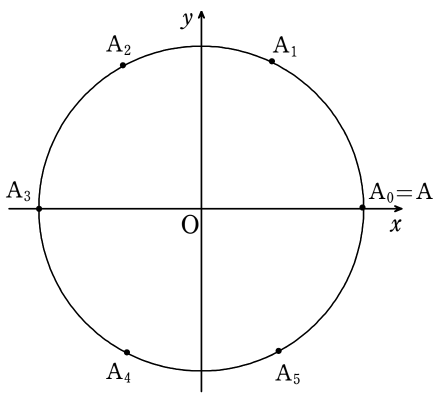
$\Leftrightarrow$ $\theta=\frac{r}{R}\cdot 2k\pi$ …④

$\Leftrightarrow$ $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}=\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}=R\theta=2\pi r\times k$ ＝（Dの円周の整数倍）

これは $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ すなわち，C上に点Pがある …（＊）ことを意味している。

④を満たすPをA_k（$\mathrm{A}_0=\mathrm{A}$）とする。

（＊）を満たすPが有限個であるとすると，ある非負整数$i,\ j$ （$i<j$）に対して$\mathrm{A}_i=\mathrm{A}_j$である。



よって $\angle\mathrm{A}_i\mathrm{OA}_j=\angle\mathrm{AOA}_j-\angle\mathrm{AOA}_i=2\pi\times$（整数）

$\frac{r}{R}\cdot 2j\pi-\frac{r}{R}\cdot 2i\pi=2\pi\times$（整数）

$\frac{r}{R}=$（整数）÷（$j-i$）＝（有理数）

逆に，$\frac{r}{R}$が有理数であるとすると，$\frac{n}{m}$（$m,\ n$は自然数）とおける。

④で$k=m$とすると $\angle\mathrm{AOA}_m=2n\pi$ であるから，$\mathrm{A}_m=\mathrm{A}_0$ である。

よって，（＊）を満たすPは多くとも $\mathrm{A}_0,\cdots,\mathrm{A}_{m-1}$ のm個で，有限個。

以上より，求める必要十分条件は $\frac{r}{R}$が有理数であることである。