[ 東京工業大学 2009 年 第 1 類特別入試 $\boxed{3}$ ]

自然数 $n$ に対し，第 1 象限において不等式

$$nx \geqq y \geqq x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{3}x^{n-2} + \cdots + \frac{1}{n}x + \frac{1}{n+1}$$

の表す領域を $S(n)$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S(n)$ を求めよ。

$n>2$ とする。 $f(x) = x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{3}x^{n-2} + \cdots + \frac{1}{n}x + \frac{1}{n+1}$ とおく。

$f(x)$ の係数はすべて正なので， $f'(x)$， $f''(x)$ の係数もすべて正となる。

よって， $x>0$ において $f(x)$ は単調増加で下に凸である。

したがって，第 1 象限における $y=f(x)$ と直線 $y=nx$ の交点は高々 2 個である。

$g(x) = nx - f(x)$ とおくと， $g(0) = -\frac{1}{n+1} < 0$

$an^k \geqq n^k \geqq n^2 > 2n > n+1$（$a$ は自然数， $k \geqq 2$）より

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \left(\frac{1}{n^n} + \frac{1}{2n^{n-1}} + \frac{1}{3n^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$> 1 - \left(\underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}}_{n+1\text{個}}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}\cdot(n+1) = 0$$

$$g(1) = n - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$> n - \left(1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{n\text{個}}\right)$$

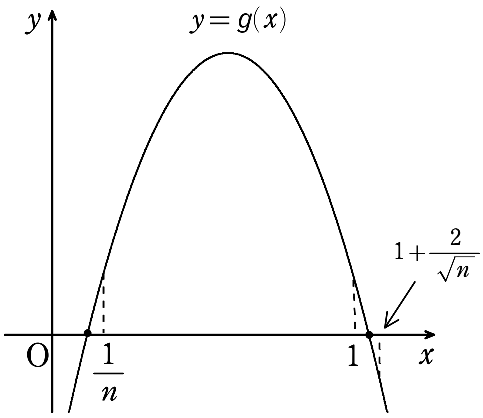
$$= n - 1 - \frac{1}{2}\cdot n$$

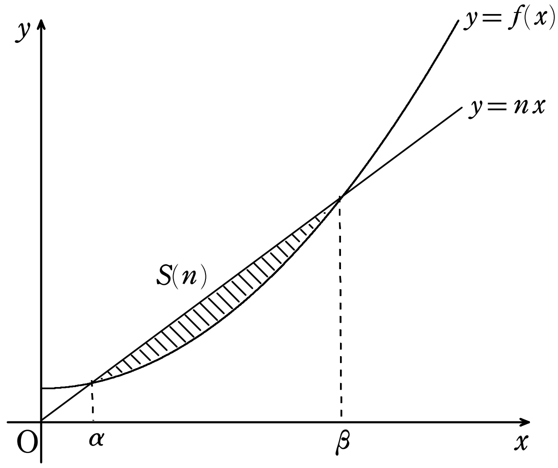
$$= \frac{n}{2} - 1 > 0$$

$x>0$ のとき，$f(x)>x^n$ より $g(x)<nx-x^n$ であるから，$d>0$ として二項定理より

$$g(1+d)<n(1+d)-(1+d)^n<n(1+d)-\left(1+nd+{}_n\mathrm{C}_2d^2\right)=(n-1)\left(1-\frac{n}{2}d^2\right)$$

よって，$g\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)<(n-1)(1-2)<0$ となる。




したがって，$y=f(x)$ と $y=nx$ の交点は 2 個あり，$x$ 座標を $\alpha,\beta$ $(\alpha<\beta)$ とすると，

$0<\alpha<\dfrac{1}{n},1<\beta<1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ である。

したがって，$\dfrac{1}{n}S(n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_\alpha^\beta\{nx-f(x)\}dx$

$$=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}-\frac{1}{n}\left(\int_0^\beta f(x)dx-\int_0^\alpha f(x)dx\right)$$

$$=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}-\frac{1}{n}\int_0^\beta f(x)dx+\frac{1}{n}\int_0^\alpha f(x)dx$$

$0\leqq x\leqq\alpha$ において $0\leqq f(x)\leqq f(\alpha)=n\alpha$ であるから

$0\leqq\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx\leqq\frac{1}{n}\int_0^\alpha n\alpha\,dx=\alpha^2<\frac{1}{n^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^\alpha f(x)dx=0$

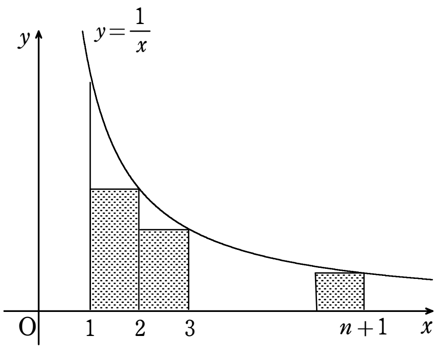
さらに，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^\beta f(x)dx=\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)dx+\frac{1}{n}\int_1^\beta f(x)dx$ であり，

$1\leqq x\leqq\beta$ において $0\leqq f(x)\leqq f(\beta)=n\beta$ であるから

$0\leqq\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^\beta f(x)dx\leqq\frac{1}{n}\int_0^\beta n\beta\,dx=\beta(\beta-1)<\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}\xrightarrow{n\to\infty}0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_1^\beta f(x)dx=0$

$0\leqq x\leqq1$ において $0\leqq f(x)\leqq f(1)$ であるから

$0\leqq\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\leqq\frac{1}{n}\int_0^1 f(1)dx=\frac{f(1)}{n}$




図において面積を評価すると　$f(1)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\ \leqq 1+\int_1^{n+1}\frac{1}{x+1}dx\ =1+\log(n+1)$　なので

$0\leqq\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx\leqq\frac{1+\log(n+1)}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$　より　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx=0$

したがって　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^\beta f(x)\,dx=0$　である。

よって　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S(n)=\frac{1-0}{2}-0+0=\frac{1}{2}$