[東京工業大学 2009 年 第 1 類特別入試 $\boxed{2}$]

漸化式 $c_{n+1}=8c_n-7 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たす数列 $c_1,\ c_2,\ c_3,\ \cdots$ を考える。数列 $c_1,\ c_2,\ c_3,\ \cdots$ に素数がただ 1 つだけ現れるような正の整数 c_1 を 2 つ求めよ。

$c_{n+1}=8c_n-7$ …①

（ i ）$c_1=7$ とする。

$n \geqq 2$ のとき，$c_n=7\ell$（ℓ は 2 以上の整数）と表せる …②

ということを数学的帰納法で示す。

$c_2=8\cdot 7-7=7^2$ より $n=2$ で②は成り立つ。

$n=k\ (\geqq 2)$ のとき②が成り立つとすると

$c_k=7\ell$（ℓ は 2 以上の整数）とおける。

①より $c_{k+1}=8c_k-7=8\cdot 7\ell-7=7(8\ell-1)$

$8\ell-1 \geqq 2$ より $n=k+1$ のときも②は成り立つ。

よって，②は成り立つ。

したがって $c_1=7$ 以外の c_n は合成数となり，$c_1=7$ は答えの 1 つである。

（ii）① $\Leftrightarrow$ $c_{n+1}-1=8(c_n-1)$ $\Leftrightarrow$ $c_n-1=8^{n-1}(c_1-1)$ $\Leftrightarrow$ $c_n=(c_1-1)2^{3(n-1)}+1$ である。

ここで，$c_1-1=1$ とすると

$c_n=2^{3(n-1)}+1=\left(2^{n-1}+1\right)\left(2^{2(n-1)}-2^{n-1}+1\right)$

となり，$n \geqq 2$ では $2^{n-1}+1 \geqq 3$，$2^{2(n-1)}-2^{n-1}+1=2^{n-1}\left(2^{n-1}-1\right)+1 \geqq \left(2-1\right)+1=3$

であるから，$c_1=2$ 以外の c_n は合成数となる。

よって，求める正の整数 c_1 は $c_1=2,\ 7$