[東京工業大学 2009 年 第 1 類特別入試 $\boxed{1}$]

この試験は現時点での諸君の論理的理解力の習熟度を測るためのものであり，乱雑に書かれているのではその役に立ちません。できるだけ丁寧な字で，採点員が論理を追い易いように各自工夫し，結論ははっきりと記述して下さい。

$f_1(x) = \pi \sin x$ とし，$n = 2, 3, 4, \cdots$ に対して，$f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$ で関数の列 $f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x), \cdots$ を定める。このとき，区間 $0 < x < \pi$ において $f_n(x)$ が極値をとるような x の個数を n で表せ。

$f_{n+1}(x) = f_1\left(f_n(x)\right) = \pi \sin f_n(x)$

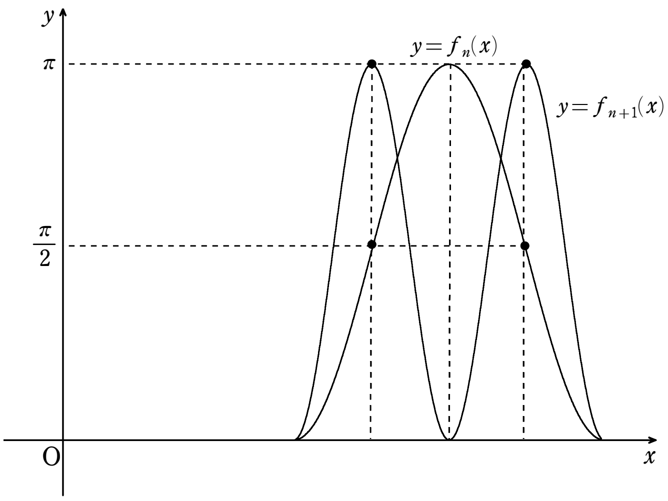
より，ある区間で $f_n(x)$ が「 0 → 増加 → π → 減少 → 0 」（山 1 個分）と変化すると，

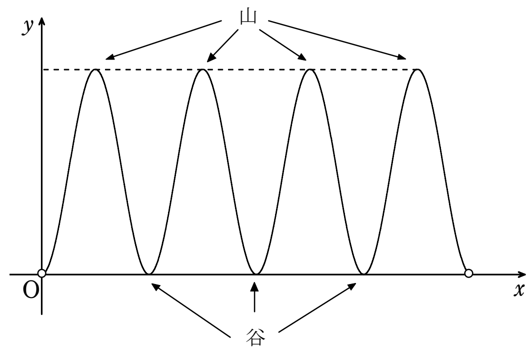
$f_{n+1}(x)$ は表のように変化する。このときの変化によるグラフの山は 2 個分である。

f_n	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↘	$\frac{\pi}{2}$	↘	0
f_{n+1}	0	↗	π	↘	0	↗	π	↘	0

いま， $f_1(x)$ （$0 \leqq x \leqq \pi$ ）は山 1 個からなるので，

帰納的に $f_n(x)$ は山 2^{n-1} 個からなる …①





$f_n(x)$ が「 減少 → 0 → 増加 」と変化する部分を「谷 1 個」とすると，

$f_n(x)$ （$0 < x < \pi$ ）が極値をとる x は，この区間の山と谷（$x = 0, \pi$ の近くは除く）の総数となる。

①より 山は 2^{n-1} 個，谷は $2^{n-1} - 1$ 個あるので，求める個数は $2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$ 個