[**東京工業大学 2009 年後期 $\boxed{1}$**]

☆ ☆

a が与えられた実数のとき，xyz 空間の点 $\mathrm{C}(a,\ 0,\ 3)$ から出た光が球 $x^2+y^2+(z-1)^2 \leqq 1$ でさえぎられてできる xy 平面上の影を S とする。点 $(X,\ Y,\ 0)$ が S に含まれる条件を求めよ。

☆ ☆

$\mathrm{P}(X,Y,0)$ とおく。

C は級の上端より上にあるから，直線 CP が球と共有点を持つための条件を求めればよい。

直線 CP 上の点は，媒介変数 t を用いて $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} X-a \\ Y \\ -3 \end{pmatrix}$ と表せるので

$x^2+y^2+(z-1)^2 \leqq 1$ に代入すると

$$\{a+(X-a)t\}^2+(tY)^2+\{(3-3t)-1\}^2 \leqq 1 \quad \cdots①$$

となる。①が t の方程式として実数解をもてばよい。

$$① \Leftrightarrow \{(X-a)^2+Y^2+9\}t^2+2\{a(X-a)-6\}t+a^2+3 \leqq 0 \quad \cdots②$$

であり，$(X-a)^2+Y^2+9>0$ より，②の左辺＝0 の 2 次方程式の判別式を D として

$$\frac{D}{4}=\{a(X-a)-6\}^2-\{(X-a)^2+Y^2+9\}(a^2+3) \geqq 0$$

$$a^2(X-a)^2-12a(X-a)+36-\{(a^2+3)(X-a)^2+(a^2+3)Y^2+9(a^2+3)\} \geqq 0$$

$$-3(X-a)^2-12a(X-a)+36-(a^2+3)Y^2 \geqq 9(a^2+3)$$

$$-3X^2-6aX-(a^2+3)Y^2 \geqq -9$$

$$3(X+a)^2+(a^2+3)Y^2 \leqq 3(a^2+3)$$

$$\frac{(X+a)^2}{a^2+3}+\frac{Y^2}{3} \leqq 1$$

よって求める条件は $\dfrac{(X+a)^2}{a^2+3}+\dfrac{Y^2}{3} \leqq 1$

[東京工業大学 2009 年後期 $\boxed{2}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$p>0,\ q>0$ であるような点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から双曲線 $y=-\dfrac{1}{x}$ へ引いた 2 本の接線の接点を $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$ とする。

pq を t とおいて，三角形 PAB の面積を t の式として表せ。また，この面積の最小値を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$y=-\dfrac{1}{x}$ のとき $y'=\dfrac{1}{x^2}$ であり，

$\left(s,\ -\dfrac{1}{s}\right)$ での接線は $y=\dfrac{1}{s^2}(x-s)-\dfrac{1}{s} \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{s^2}x-\dfrac{2}{s}$ である。

これが P を通るとき，$q=\dfrac{1}{s^2}p-\dfrac{2}{s}$ より $qs^2+2s-p=0$ …①

①を満たす s を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，$\mathrm{A}\left(\alpha,\ -\dfrac{1}{\alpha}\right),\ \mathrm{B}\left(\beta,\ -\dfrac{1}{\beta}\right)$ としてよく，

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\left(\alpha-p,\ -\dfrac{1}{\alpha}-q\right),\ \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(\beta-p,\ -\dfrac{1}{\beta}-q\right)$ なので

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\left|(\alpha-p)\left(-\frac{1}{\beta}-q\right)-(\beta-p)\left(-\frac{1}{\alpha}-q\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|q(\beta-\alpha)+p\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right|$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{2}\left|q-\frac{p}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right| \quad \cdots②$$

となる。

①において，解と係数の関係より $\alpha+\beta=-\dfrac{2}{q},\ \alpha\beta=-\dfrac{p}{q}$ であり，

$s=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+pq}}{q}$ であるから $\beta-\alpha=\dfrac{2\sqrt{1+pq}}{q}$ なので

$$②=\frac{\sqrt{1+pq}}{q}\left|q-(-q)+\frac{2}{p}\right|=\sqrt{1+pq}\left|2+\frac{2}{pq}\right|=\sqrt{1+t}\left|2+\frac{2}{t}\right|=\frac{2(1+t)^{\frac{3}{2}}}{t}$$

となる。

また， $g(t)=\dfrac{2(1+t)^{\frac{3}{2}}}{t}$ とおくと

$$g'(t)=2\left\{\frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}t^{-1}+(1+t)^{\frac{3}{2}}(-1)t^{-2}\right\}$$

$$=2\left\{\frac{3\sqrt{1+t}}{2t}-\frac{(1+t)\sqrt{1+t}}{t^2}\right\}$$

$$=\frac{(t-2)\sqrt{1+t}}{t^2}$$

であり， $t=pq>0$ より $t=2$ のときに $g(t)$ は極小かつ最小になる。

よって求める面積の最小値は $g(2)=3\sqrt{3}$