[**東京工業大学 2009 年後期 $\boxed{1}$**]

☆――――――――――――――――――――――――――――☆

a が与えられた実数のとき，xyz 空間の点 $\mathrm{C}(a,\ 0,\ 3)$ から出た光が球 $x^2+y^2+(z-1)^2 \leqq 1$ でさえぎられてできる xy 平面上の影を S とする。点 $(X,\ Y,\ 0)$ が S に含まれる条件を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――☆

$\mathrm{P}(X,\ Y,\ 0)$ とおく。

C は級の上端より上にあるから，直線 CP が球と共有点を持つための条件を求めればよい。

直線 CP 上の点は，媒介変数 t を用いて $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} X-a \\ Y \\ -3 \end{pmatrix}$ と表せるので

$x^2+y^2+(z-1)^2 \leqq 1$ に代入すると

$$\left\{a+(X-a)t\right\}^2+(tY)^2+\left\{\left(3-3t\right)-1\right\}^2 \leqq 1 \quad \cdots ①$$

となる。①が t の方程式として実数解をもてばよい。

$$① \Leftrightarrow \left\{(X-a)^2+Y^2+9\right\}t^2+2\{a(X-a)-6\}t+a^2+3 \leqq 0 \quad \cdots ②$$

であり，$(X-a)^2+Y^2+9>0$ より，②の左辺＝0 の 2 次方程式の判別式を D として

$$\frac{D}{4}=\{a(X-a)-6\}^2-\left\{(X-a)^2+Y^2+9\right\}\left(a^2+3\right) \geqq 0$$

$$a^2(X-a)^2-12a(X-a)+36-\left\{\left(a^2+3\right)(X-a)^2+\left(a^2+3\right)Y^2+9\left(a^2+3\right)\right\} \geqq 0$$

$$-3(X-a)^2-12a(X-a)+36-\left(a^2+3\right)Y^2 \geqq 9\left(a^2+3\right)$$

$$-3X^2-6aX-\left(a^2+3\right)Y^2 \geqq -9$$

$$3\left(X+a\right)^2+\left(a^2+3\right)Y^2 \leqq 3(a^2+3)$$

$$\frac{\left(X+a\right)^2}{a^2+3}+\frac{Y^2}{3} \leqq 1$$

よって求める条件は $\dfrac{\left(X+a\right)^2}{a^2+3}+\dfrac{Y^2}{3} \leqq 1$