[東京工業大学 2009 年前期 $\boxed{1}$]

☆―――☆

点 P から放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ へ 2 本の接線が引けるとき，2 つの接点を A, B とし，線分 PA, PB および この放物線で囲まれる図形の面積を S とする。PA, PB が直交するときの S の最小値を求めよ。

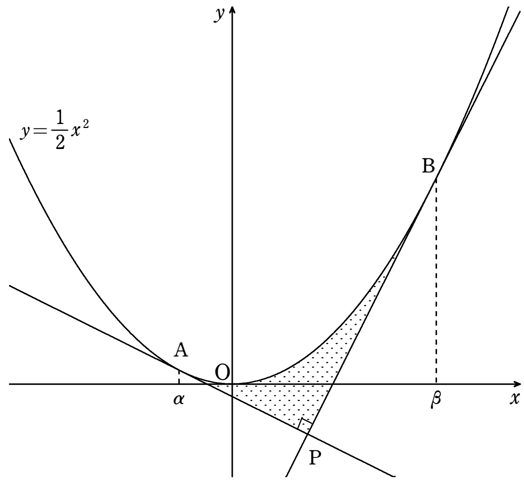
☆―――☆

2 つの接点 A, B の x 座標をそれぞれ α, β （$\alpha<\beta$ …①）とする。

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ のとき $y'=x$ であり，点 A における接線は

$y-\dfrac{1}{2}\alpha^2=\alpha(x-\alpha) \Leftrightarrow y=\alpha x-\dfrac{1}{2}\alpha^2$ …②

点 B における接線も同様にして，$y=\beta x-\dfrac{1}{2}\beta^2$ …③



②，③を連立して，2 つの接線の交点の x 座標を求めると，

$\alpha x-\dfrac{1}{2}\alpha^2=\beta x-\dfrac{1}{2}\beta^2$ から $(\alpha-\beta)x=\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

①より $\beta-\alpha\neq 0$ なので，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ となる。

よって $S=\displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2\right)\right\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(\beta x-\frac{1}{2}\beta^2\right)\right\}dx$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{1}{2}(x-\alpha)^2dx++\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\frac{1}{2}(x-\beta)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{6}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{1}{6}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\frac{1}{6}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3$$

ここで，PA, PB，すなわち②と③が直交するとき，$\alpha\beta=-1$ …④ であり，

①より $\alpha<0<\beta$

相加平均・相乗平均の関係式より $\dfrac{\beta-\alpha}{2}\geqq\sqrt{\beta\cdot(-\alpha)}=1$

等号成立は $\beta=-\alpha$ かつ①かつ④より $\alpha=-1, \beta=1$ のとき。

よって，S の最小値は $\dfrac{1}{3}\cdot 1^3=\dfrac{1}{3}$

[東京工業大学 2009 年前期 $\boxed{2}$]

実数 a に対し，次の 1 次変換

$$f(x,\ y)=(ax+(a-2)y,\ (a-2)x+ay)$$

を考える。以下の 2 条件をみたす直線 L が存在するような a を求めよ。

(1) L は点 $(0,1)$ を通る。

(2) 点 Q が L 上にあれば，その f による像 $f(\mathrm{Q})$ も L 上にある。

条件(1)より L の方程式は，$y=mx+1$ または $x=0$ とおける。

(ｉ) $L: y=mx+1$ のとき

L 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ mt+1)$ の f による像 $f(\mathrm{Q})$ の座標を (X,Y) とおく。

$X=at+(a-2)(mt+1)=\{a+(a-2)m\}t+a-2$

$Y=(a-2)t+a(mt+1)=(a-2+am)t+a$

であり，$f(\mathrm{Q})$ が L 上にあるのは「$Y=mX+1$ がすべての t に対して成り立つ」ときである。

よって　$(a-2+am)t+a=m[\{a+(a-2)m\}t+a-2]+1$

$\Leftrightarrow$ $(a-2+am)t+a=m\{a+(a-2)m\}t+m(a-2)+1$

が t の恒等式になるので係数を比較して $\begin{cases} a-2+am=m\{a+(a-2)m\} \cdots ① \\ a=m(a-2)+1 \cdots ② \end{cases}$

①より $(a-2)(m^2-1)=0$

よって $a=2$ または $m=\pm 1$

$a=2,\ m=1$ のときは②が成り立たないので不適。$m=-1$ のとき $a=\dfrac{3}{2}$ となる。

(ⅱ) $L: x=0$ のとき

L 上の点 $\mathrm{Q}(0,\ t)$ の f による像 $f(\mathrm{Q})$ は

$((a-2)t,\ at)$

であり，$f(\mathrm{Q})$ が L 上にあるのは「$(a-2)t=0$ がすべての t に対して成り立つ」ときである。

よって $a=2$ である。

(ｉ)，(ⅱ)より 求める a は $a=\dfrac{3}{2},\ 2$

[別解]

点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ の f による像 $f(\mathrm{A})$ を (X,Y) とおくと

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ \cdots①$$ である。

原点をO，点 $(0,1)$ を O′，$\overrightarrow{\mathrm{O'A}}=(x',\ y')$, $\overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{A})}=(X',\ Y')$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'A}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{A})}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{A})}$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$

これを①に代入して $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right\}$

すなわち $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}\ \cdots②$ となる。

特にAとO′が一致するとき，$(x',\ y')=(0,\ 0)$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{O'})}=(a-2,\ a-1)\neq\vec{0}$ となる。

直線 L に関する2つの条件より，L は点O′と点 $f(\mathrm{O'})$ の2点を通るので $L\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{O'})}$ である。

ここで，点Aを L 上の任意の点とすると，$\overrightarrow{\mathrm{O'A}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{O'})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}/\!/\begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}$

したがって $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}\ \cdots③$ となる。

このとき，点 $f(\mathrm{A})$ が L 上の点であればよい。

②，③より
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{A})}=\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}\\ &=k\begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}\\ &=k\begin{pmatrix} a(a-2)+(a-2)(a-1) \\ (a-2)^2+a(a-1) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であり，$f(\mathrm{A})$ が L 上の点であることから $\overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{A})}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{O'})}$ が成り立つ。

よって $k\begin{pmatrix} a(a-2)+(a-2)(a-1) \\ (a-2)^2+a(a-1) \end{pmatrix}/\!/\begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}$

したがって $k\{a(a-2)+(a-2)(a-1)\}:(a-2)=k\{(a-2)^2+a(a-1)\}:(a-1)$

$\Leftrightarrow\ k\{a(a-2)+(a-2)(a-1)\}(a-1)=k\{(a-2)^2+a(a-1)\}(a-2)$

すなわち $k(a-2)(2a-3)=0$

これが任意の k に対して成り立つので $a=2,\ \dfrac{3}{2}$

[東京工業大学 2009 年前期 $\boxed{3}$]

☆

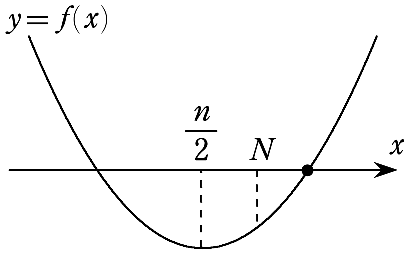
N を正の整数とする。$2N$ 以下の正の整数 $m,\ n$ からなる組 $(m,\ n)$ で，方程式 $x^2-nx+m=0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。

☆

$f(x)=x^2-nx+m$ とおく。

方程式 $f(x)=0$ の実数解は，放物線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標である。

$y=f(x)$ の軸 $x=\dfrac{n}{2}$ に対し，$\dfrac{n}{2}\leqq N$ であることに注意すると，



方程式 $f(x)=0$ が N 以上の解を持つ条件は

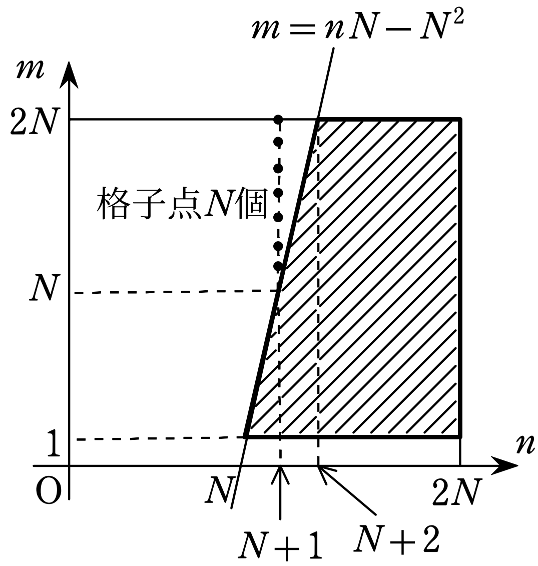
$f(N)\leqq 0$ より $N^2-nN+m\leqq 0$

すなわち $m\leqq Nn-N^2$ …① であり，①かつ $\begin{cases}1\leqq m\leqq 2N\\1\leqq n\leqq 2N\end{cases}$ …②

を満たす整数 $m,\ n$ の個数を求めればよい。

①かつ②を nm 平面に図示すると右図のようになるので，

求める組数は $(2N-N)\times 2N-N=2N^2-N$



[注]

$N=1$，2 のときは，不等式で表される領域が台形にはならない。

$N=1$のときは 1 点のみで 1 個，$N=2$ のときは三角形の周および内部の格子点で 6 個になる。

いずれの場合も $2N^2-N$ に含まれている。

[東京工業大学 2009 年前期 $\boxed{4}$]

☆─────────────────────────────────────☆

xyz 空間の原点と点 $(1, 1, 1)$ を通る直線を ℓ とする。

(1) ℓ 上の点 $\left(\dfrac{t}{3}, \dfrac{t}{3}, \dfrac{t}{3}\right)$ を通り，ℓ と垂直な平面が，xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

(2) 不等式 $0 \leqq y \leqq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする。ℓ を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

☆─────────────────────────────────────☆

(1) ℓ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{t}{3}, \dfrac{t}{3}, \dfrac{t}{3}\right)$ を通り，ℓ と垂直な平面を α_t とする。

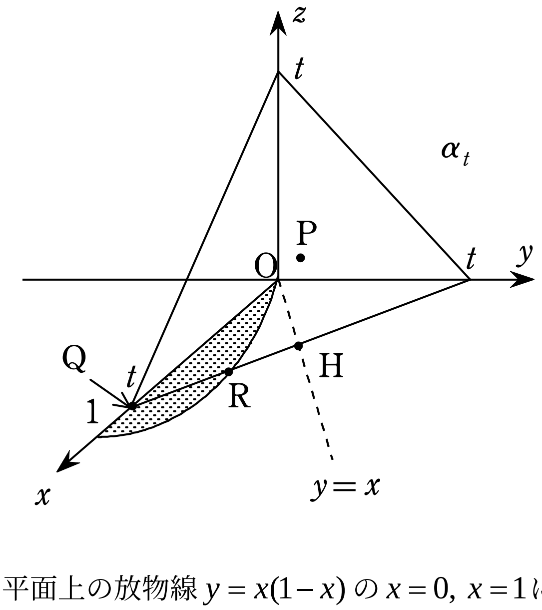
α_t 上の点を $\mathrm{X}(x, y, z)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ が ℓ の方向ベクトル $(1, 1, 1)$ と垂直であるから

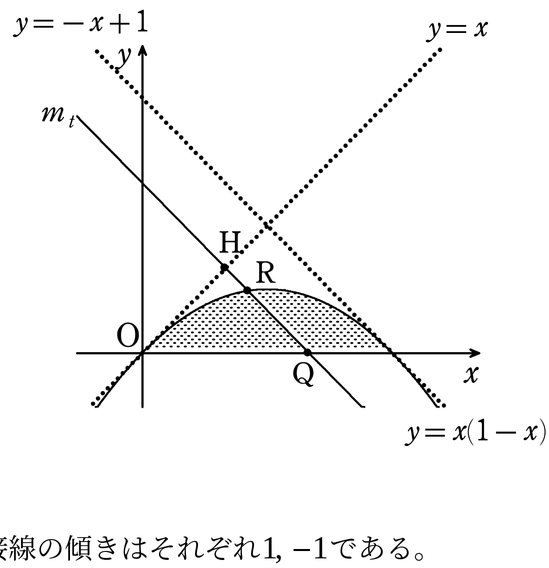
$$(1, 1, 1)\cdot\overrightarrow{\mathrm{PX}} = 0 \iff 1\cdot\left(x-\frac{t}{3}\right)+1\cdot\left(y-\frac{t}{3}\right)+1\cdot\left(z-\frac{t}{3}\right)=0 \iff x+y+z=t \quad \cdots① \text{ となる。}$$

求める α_t と xy 平面の交線を m_t とすると，①で $z=0$ として　$x+y=t$　かつ　$z=0$　$\cdots②$

(2) 平面 α_t による領域 D の切り口は,

直線 m_t と D との共通部分であり，図の線分 QR となる。





xy 平面上の放物線 $y=x(1-x)$ の $x=0,\ x=1$ における接線の傾きはそれぞれ $1,\ -1$ である。

ℓ を軸として D を回転させて得られる立体の平面 α_t による切り口は，点 P のまわりに線分 QR を回転させて得られる図形（円環）であり，その面積を S とすると,

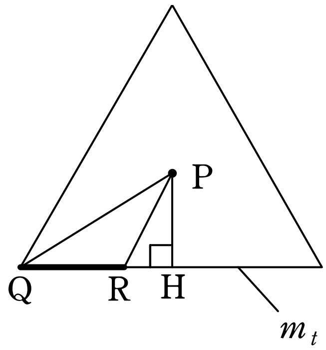
$\mathrm{PH} \perp m_t$ であるから

$$S = \pi(\mathrm{PQ}^2 - \mathrm{PR}^2)$$

$$= \pi\{(\mathrm{PH}^2 + \mathrm{HQ}^2) - (\mathrm{PH}^2 + \mathrm{HR}^2)\}$$

$$= \pi(\mathrm{HQ}^2 - \mathrm{HR}^2)$$

となる。



H の x 座標は $\dfrac{t}{2}$，Q の x 座標は t，R の x 座標は②と $y = x(1-x)$ を連立させて得られる t の 2 次方程式 $x^2 - 2x + t = 0$ の小さい方の解 $1-\sqrt{1-t}$ であるから，

$$\mathrm{HQ}^2 - \mathrm{HR}^2 = \left\{\sqrt{2}\left(t - \frac{t}{2}\right)\right\}^2 - \left\{\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{1-t} - \frac{t}{2}\right)\right\}^2$$

$$= \frac{t^2}{2} - \left\{2\left(1 + (1-t) + \frac{t^2}{4} - 2\sqrt{1-t} + t\sqrt{1-t} - t\right)\right\}$$

$$= -2\left(2 - 2t - 2\sqrt{1-t} + t\sqrt{1-t}\right)$$

$$= 4t - 4 + 4\sqrt{1-t} - 2t\sqrt{1-t}$$

$$= 4t - 4 + 2\sqrt{1-t} + 2(1-t)\sqrt{1-t}$$

また，t が $\Delta t\,(>0)$ だけ変化すると，P は直線 ℓ 上を $\sqrt{\left(\dfrac{\Delta t}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta t}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta t}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\Delta t$ だけ動く。

以上より，求める体積は

$$\int_0^1 S \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \int_0^1 \left\{4t - 4 + 2\sqrt{1-t} + 2(1-t)\sqrt{1-t}\right\} dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \left[2t^2 - 4t - \frac{4}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}(1-t)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \left\{(-2) - \left(-\frac{4}{3} - \frac{4}{5}\right)\right\}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{45}\pi$$