[東京工業大学 2009 年前期 $\boxed{4}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

xyz 空間の原点と点 $(1, 1, 1)$ を通る直線を ℓ とする。

(1) ℓ 上の点 $\left(\dfrac{t}{3}, \dfrac{t}{3}, \dfrac{t}{3}\right)$ を通り，ℓ と垂直な平面が，xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

(2) 不等式 $0 \leqq y \leqq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする。ℓ を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) ℓ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{t}{3}, \dfrac{t}{3}, \dfrac{t}{3}\right)$ を通り，ℓ と垂直な平面を α_t とする。

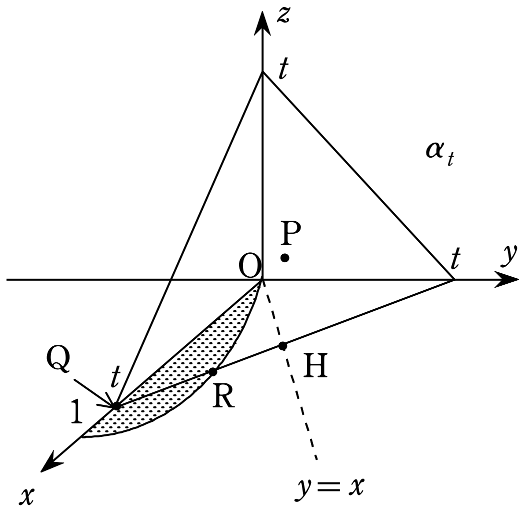
α_t 上の点を $\mathrm{X}(x, y, z)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ が ℓ の方向ベクトル $(1, 1, 1)$ と垂直であるから

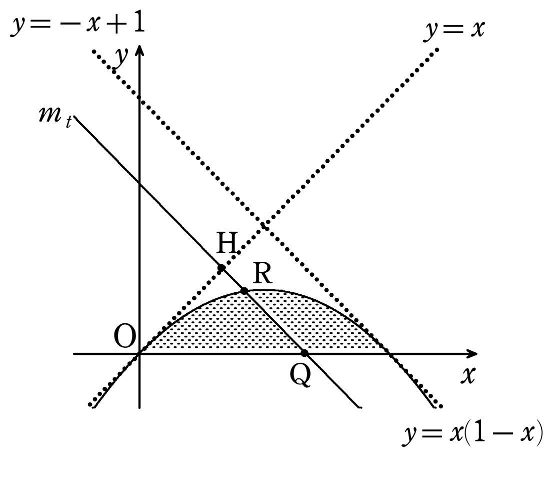
$(1, 1, 1)\cdot\overrightarrow{\mathrm{PX}} = 0 \iff 1\cdot\left(x-\dfrac{t}{3}\right)+1\cdot\left(y-\dfrac{t}{3}\right)+1\cdot\left(z-\dfrac{t}{3}\right)=0 \iff x+y+z=t$ …① となる。

求める α_t と xy 平面の交線を m_t とすると，①で $z=0$ として $x+y=t$ かつ $z=0$ …②

(2) 平面 α_t による領域 D の切り口は，

直線 m_t と D との共通部分であり，図の線分 QR となる。





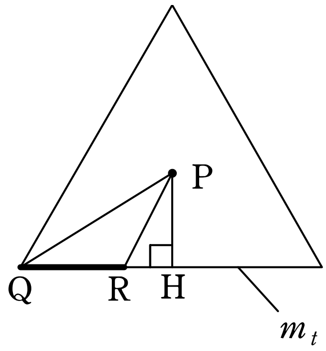
xy 平面上の放物線 $y = x(1-x)$ の $x=0,\ x=1$ における接線の傾きはそれぞれ $1,\ -1$ である。

ℓ を軸として D を回転させて得られる立体の平面 α_t による切り口は，点 P のまわりに線分 QR を回転させて得られる図形（円環）であり，その面積を S とすると，

$\mathrm{PH} \perp m_t$ であるから

$$S=\pi(\mathrm{PQ}^2-\mathrm{PR}^2)$$
$$=\pi\{(\mathrm{PH}^2+\mathrm{HQ}^2)-(\mathrm{PH}^2+\mathrm{HR}^2)\}$$
$$=\pi(\mathrm{HQ}^2-\mathrm{HR}^2)$$

となる。



H の x 座標は $\dfrac{t}{2}$，Q の x 座標は t，R の x 座標は②と $y=x(1-x)$ を連立させて得られる t の 2 次方程式 $x^2-2x+t=0$ の小さい方の解 $1-\sqrt{1-t}$ であるから，

$$\mathrm{HQ}^2-\mathrm{HR}^2=\left\{\sqrt{2}\left(t-\frac{t}{2}\right)\right\}^2-\left\{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{1-t}-\frac{t}{2}\right)\right\}^2$$
$$=\frac{t^2}{2}-\left\{2\left(1+(1-t)+\frac{t^2}{4}-2\sqrt{1-t}+t\sqrt{1-t}-t\right)\right\}$$
$$=-2\left(2-2t-2\sqrt{1-t}+t\sqrt{1-t}\right)$$
$$=4t-4+4\sqrt{1-t}-2t\sqrt{1-t}$$
$$=4t-4+2\sqrt{1-t}+2(1-t)\sqrt{1-t}$$

また，t が $\Delta t\,(>0)$ だけ変化すると，P は直線 ℓ 上を $\sqrt{\left(\dfrac{\Delta t}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta t}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta t}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Delta t$ だけ動く。

以上より，求める体積は

$$\int_0^1 S\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}dt=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\int_0^1\left\{4t-4+2\sqrt{1-t}+2(1-t)\sqrt{1-t}\right\}dt$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\left[2t^2-4t-\frac{4}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{5}(1-t)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\left\{(-2)-\left(-\frac{4}{3}-\frac{4}{5}\right)\right\}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{45}\pi$$