[東京工業大学 2009 年前期 $\boxed{3}$]

☆ ☆

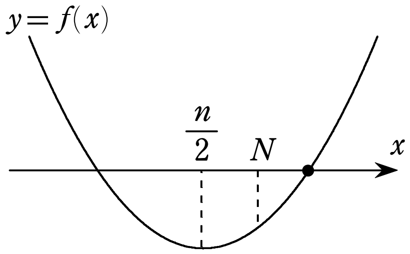
N を正の整数とする。$2N$ 以下の正の整数 $m,\ n$ からなる組 $(m,\ n)$ で，方程式 $x^2-nx+m=0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。

☆ ☆

$f(x)=x^2-nx+m$ とおく。

方程式 $f(x)=0$ の実数解は，放物線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標である。

$y=f(x)$ の軸 $x=\dfrac{n}{2}$ に対し，$\dfrac{n}{2}\leqq N$ であることに注意すると，



方程式 $f(x)=0$ が N 以上の解を持つ条件は

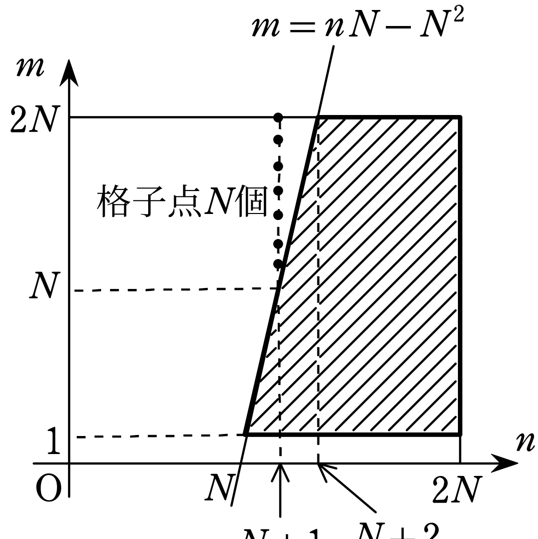
$f(N)\leqq 0$ より $N^2-nN+m\leqq 0$

すなわち $m\leqq Nn-N^2$ …① であり，①かつ $\begin{cases}1\leqq m\leqq 2N\\ 1\leqq n\leqq 2N\end{cases}$ …②

を満たす整数 $m,\ n$ の個数を求めればよい。

①かつ②を nm 平面に図示すると右図のようになるので，

求める組数は $(2N-N)\times 2N-N=2N^2-N$



[注]

$N=1$，2 のときは，不等式で表される領域が台形にはならない。

$N=1$のときは 1 点のみで 1 個，$N=2$ のときは三角形の周および内部の格子点で 6 個になる。

いずれの場合も $2N^2-N$ に含まれている。