[東京工業大学 2009 年前期 $\boxed{2}$]

実数 a に対し，次の 1 次変換

$$f(x,\ y)=(ax+(a-2)y,\ (a-2)x+ay)$$

を考える。以下の 2 条件をみたす直線 L が存在するような a を求めよ。

(1) L は点 $(0,1)$ を通る。

(2) 点 Q が L 上にあれば，その f による像 $f(\mathrm{Q})$ も L 上にある。

条件(1)より L の方程式は，$y=mx+1$ または $x=0$ とおける。

(ｉ) $L: y=mx+1$ のとき

L 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ mt+1)$ の f による像 $f(\mathrm{Q})$ の座標を $(X,\ Y)$ とおく。

$$X=at+(a-2)(mt+1)=\{a+(a-2)m\}t+a-2$$

$$Y=(a-2)t+a(mt+1)=(a-2+am)t+a$$

であり，$f(\mathrm{Q})$ が L 上にあるのは「$Y=mX+1$ がすべての t に対して成り立つ」ときである。

よって　$(a-2+am)t+a=m[\{a+(a-2)m\}t+a-2]+1$

$$\Leftrightarrow\ (a-2+am)t+a=m\{a+(a-2)m\}t+m(a-2)+1$$

が t の恒等式になるので係数を比較して $\begin{cases} a-2+am=m\{a+(a-2)m\} \cdots ① \\ a=m(a-2)+1 \cdots ② \end{cases}$

①より　$(a-2)(m^2-1)=0$

よって　$a=2$ または $m=\pm 1$

$a=2,\ m=1$ のときは②が成り立たないので不適。$m=-1$ のとき $a=\dfrac{3}{2}$ となる。

(ⅱ) $L: x=0$ のとき

L 上の点 $\mathrm{Q}(0,\ t)$ の f による像 $f(\mathrm{Q})$ は

$$((a-2)t,\ at)$$

であり，$f(\mathrm{Q})$ が L 上にあるのは「$(a-2)t=0$ がすべての t に対して成り立つ」ときである。

よって　$a=2$ である。

(ｉ)，(ⅱ)より 求める a は $a=\dfrac{3}{2},\ 2$

[別解]

点$\mathrm{A}(x,\ y)$のfによる像$f(\mathrm{A})$を$(X,\ Y)$とおくと

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ …① である。

原点をO，点$(0,\ 1)$をO′，$\overrightarrow{\mathrm{O'A}} = (x',\ y')$, $\overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{A})} = (X',\ Y')$とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'A}}$，$\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{A})} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{A})}$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$

これを①に代入して $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right\}$

すなわち $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}$ …② となる。

特にAとO′が一致するとき，$(x',\ y') = (0,\ 0)$なので，$\overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{O'})} = (a-2,\ a-1) \neq \vec{0}$ となる。

直線Lに関する2つの条件より，Lは点O′と点$f(\mathrm{O'})$の2点を通るので $L /\!/ \overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{O'})}$ である。

ここで，点AをL上の任意の点とすると，$\overrightarrow{\mathrm{O'A}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{O'})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}$

したがって $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}$ …③ となる。

このとき，点$f(\mathrm{A})$がL上の点であればよい。

②，③より $\overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{A})} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}$

$$= k\begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}$$

$$= k\begin{pmatrix} a(a-2)+(a-2)(a-1) \\ (a-2)^2 + a(a-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}$$

であり，$f(\mathrm{A})$がL上の点であることから $\overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{A})} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{O'}f(\mathrm{O'})}$ が成り立つ。

よって $k\begin{pmatrix} a(a-2)+(a-2)(a-1) \\ (a-2)^2 + a(a-1) \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}$

したがって $k\{a(a-2)+(a-2)(a-1)\} : (a-2) = k\{(a-2)^2 + a(a-1)\} : (a-1)$

$$\Leftrightarrow k\{a(a-2)+(a-2)(a-1)\}(a-1) = k\{(a-2)^2 + a(a-1)\}(a-2)$$

すなわち $k(a-2)(2a-3) = 0$

これが任意のkに対して成り立つので $a = 2,\ \dfrac{3}{2}$