[東京工業大学 2009 年前期 $\boxed{1}$]

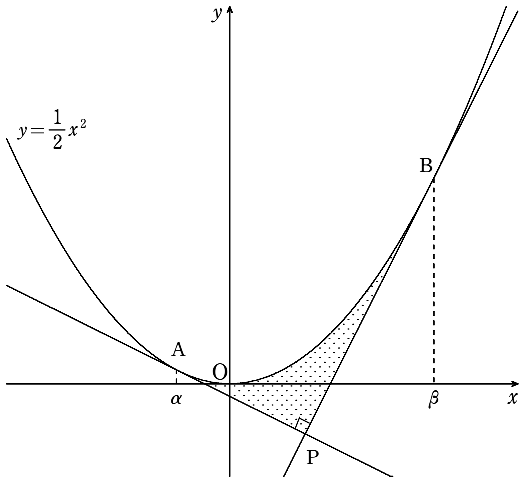
☆────────────────────────☆

点 P から放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ へ 2 本の接線が引けるとき，2 つの接点を A, B とし，線分 PA, PB および この放物線で囲まれる図形の面積を S とする。PA, PB が直交するときの S の最小値を求めよ。

☆────────────────────────☆

2 つの接点 A, B の x 座標をそれぞれ α, β（$\alpha<\beta$ …①）とする。

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ のとき $y'=x$ であり，点 A における接線は



$y-\dfrac{1}{2}\alpha^2=\alpha(x-\alpha) \Leftrightarrow y=\alpha x-\dfrac{1}{2}\alpha^2$ …②

点 B における接線も同様にして，$y=\beta x-\dfrac{1}{2}\beta^2$ …③

②，③を連立して，2 つの接線の交点の x 座標を求めると，

$\alpha x-\dfrac{1}{2}\alpha^2=\beta x-\dfrac{1}{2}\beta^2$ から $(\alpha-\beta)x=\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

①より $\beta-\alpha\neq 0$ なので，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ となる。

よって $S=\displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2\right)\right\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(\beta x-\frac{1}{2}\beta^2\right)\right\}dx$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\frac{1}{2}(x-\alpha)^2dx++\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\frac{1}{2}(x-\beta)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{6}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{1}{6}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\frac{1}{6}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3$$

ここで，PA, PB，すなわち②と③が直交するとき，$\alpha\beta=-1$ …④ であり，

①より $\alpha<0<\beta$

相加平均・相乗平均の関係式より $\dfrac{\beta-\alpha}{2}\geqq\sqrt{\beta\cdot(-\alpha)}=1$

等号成立は $\beta=-\alpha$ かつ①かつ④より $\alpha=-1, \beta=1$ のとき。

よって，S の最小値は $\dfrac{1}{3}\cdot 1^3=\dfrac{1}{3}$