[東京工業大学 2008 年 第 1 類特別入試 $\boxed{1}$]

この試験は現時点での諸君の論理的理解力の習熟度を測るためのものであり，あまりに乱暴な字ではその役に立ちません。できるだけ丁寧な字で，採点員が論理を追い易いように各自工夫し，結論をはっきりと記述して下さい。

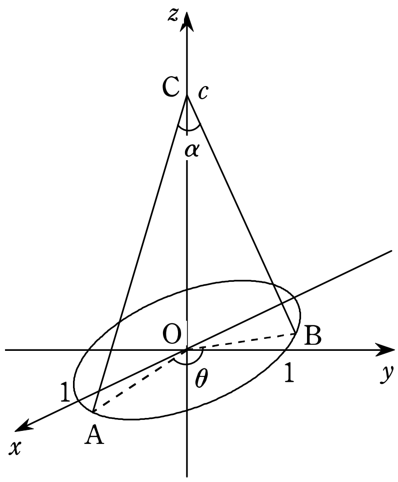
$0<\alpha<\pi$ とする。xyz-空間上の 3 点 A, B, C は次の条件(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)をみたすように配置してあるとする。

（ⅰ）A, B は原点を中心とする xy-平面上の半径 1 の円周上にある。

（ⅱ）C は z-軸の正の部分にある。

（ⅲ）$\angle \mathrm{ACB}=\alpha$。

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)を満たす A, B, C と原点 O が作る 4 面体 OABC のうち体積が最大のものの体積を $V(\alpha)$ とする。このとき極限値 $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty}\alpha V(\alpha)$ を求めよ。



$\angle \mathrm{AOB}=\theta \quad (0<\theta<\pi)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c) \quad (c>0)$ とおく。

$\triangle$OAB において余弦定理より $\mathrm{AB}^2=1+1-2\cos\theta=2(1-\cos\theta)$

また，$\mathrm{CA}=\mathrm{CB}=\sqrt{1+c^2}$ であり，$\triangle$CAB において余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2=\left(1+c^2\right)+\left(1+c^2\right)-2\left(1+c^2\right)\cos\alpha=2\left(1+c^2\right)(1-\cos\alpha)$$

したがって $2(1-\cos\theta)=2\left(1+c^2\right)(1-\cos\alpha)$

$c>0$ であるから $c=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1-\cos\alpha}-1}=\sqrt{\dfrac{\cos\alpha-\cos\theta}{1-\cos\alpha}}$ となる。

四面体 OABC の体積は

$$\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{OC}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\sin\theta\cdot c\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{\sin^2\theta\cdot\frac{\cos\alpha-\cos\theta}{1-\cos\alpha}}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\left(1-\cos^2\theta\right)\left(\cos\alpha-\cos\theta\right)}{1-\cos\alpha}}\quad\cdots①$$

ここで，$t=\cos\theta\quad(-1<t<1)$ とおき，

$f(t)=\left(1-t^2\right)\left(\cos\alpha-t\right)=t^3-\left(\cos\alpha\right)t^2-t+\cos\alpha$ とおくと，

$f'(t)=3t^2-2\left(\cos\alpha\right)t-1\quad\cdots②$

$f'(0)=-1$ であり，$0<\alpha<\pi$ より

$f'(\pm1)=3\mp2\cos\alpha-1=2(1\mp\cos\alpha)>0$ （複号同順）であるから

t の方程式 $f'(t)=0$ は $-1<t<1$ に相異なる実数解を 2 個もつ。

これらを $t_0, t_1\quad(t_0<t_1)$ とすると，$f(t)$ の増減は下表に従う。

t	(-1)	$\cdots$	t_0	$\cdots$	t_1	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		＋	0	－	0	＋	
$f(t)$		↗		↘		↗	(0)

$t=t_0$ のときに $f(t)$ は最大となる。

よって，$\alpha V(\alpha)=\dfrac{1}{6}\alpha\sqrt{\dfrac{\left(1-t_0^{\,2}\right)\left(\cos\alpha-t_0\right)}{1-\cos\alpha}}\quad\cdots③$

ここで，t_0 は $②=3t^2-2(\cos\alpha)t-1=0$ の解のうちの小さい方であり，

$$t_0=\frac{\cos\alpha-\sqrt{\cos^2\alpha+3}}{3}\xrightarrow{\alpha\to0}-\frac{1}{3}$$

また，$\displaystyle\lim_{\alpha\to0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{2}$ なので，

$$③=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\alpha^2}{1-\cos\alpha}}\cdot\sqrt{\left(1-t_0^{\,2}\right)\left(\cos\alpha-t_0\right)}\xrightarrow{\alpha\to0}\frac{1}{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right\}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{8}{9}\cdot\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{27}$$

[東京工業大学 2008 年 第 1 類特別入試 $\boxed{2}$]

☆ ☆

n を自然数，$P(x)$ を n 次多項式とする。$P(0),\ P(1),\ \cdots,\ P(n)$ が整数ならば，すべての自然数 k に対し，$P(k)$ は整数であることを証明せよ。

☆ ☆

「n 次多項式 $P(x)$ に対して，$P(0),\ P(1),\ \cdots,\ P(n)$ が整数ならば，

すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数」…①

であることを，次数 n に関する数学的帰納法で示す。

(ｉ) $n=1$ のとき

$P(x)=ax+b$ とおくことができる。

$P(0)=b,\ P(1)=a+b$ がともに整数なので，

$a=P(1)-P(0)$，$b=P(0)$ はともに整数である。

よって，すべての整数 k に対し，$P(k)=ak+b$ は整数であるから①が成り立つ。

(ⅱ) $n=m(\geqq 1)$ のとき，①が成り立つと仮定する。

$R(x)$ を「$m+1$ 次多項式で，$R(0),\ R(1),\ \cdots,\ R(m+1)$ は整数」…②

を満たすものとする。このとき，

$R(x+1)-R(x)=\{a(x+1)^{m+1}+\cdots\}-(ax^{m+1}+\cdots)=$（$m$ 次式）

であるから，m 次多項式 $P(x)$ を用いて

$R(x+1)-R(x)=P(x)$ …③

と表すことができる。

よって②より，$P(0),\ P(1),\ \cdots,\ P(m)$ は整数

であるから帰納法の仮定①より，すべての整数 k に対して $P(k)$ は整数である。

よって③より，$R(\ell)$ が整数ならば，

$R(\ell+1)=P(\ell)+R(\ell)$，$R(\ell-1)=R(\ell)-P(\ell-1)$ はともに整数である。

これと，$R(0)$ が整数であることより，帰納的にすべての整数 k に対し，$R(k)$ は整数となる。

従って，$n=m+1$ のときも①は成り立つ。

(ｉ)(ⅱ)より，数学的帰納法によって題意は示された。

[別解]

「n 次多項式 $P(x)$ に対して，$P(0),\ P(1),\ \cdots,\ P(n)$ が整数ならば，

すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数」…①

であることを，次数 n に関する数学的帰納法で示す。

(ｉ) $n=1$ のとき

$P(x)=ax+b$ とおくことができる。

$P(0)=b,\ P(1)=a+b$ がともに整数なので，

$a=P(1)-P(0)$，$b=P(0)$ はともに整数である。

よって，すべての整数 k に対し，$P(k)=ak+b$ は整数であるから①が成り立つ。

(ⅱ) $n=m(\geqq 1)$ のとき，①が成り立つと仮定する。

このとき，

「$m+1$ 次多項式 $P(x)$ に対して，$P(0),\ P(1),\ \cdots,\ P(m+1)$ が整数ならば，

すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数となること」を示す。

$R(x)=P(x+1)-P(x)$ とおくと，$R(x)$ は（高々）m 次式であり，仮定より

$R(0)=P(1)-P(0)$

$R(1)=P(2)-P(1)$

$\vdots$

$R(m)=P(m+1)-P(m)$

はすべて整数であり，m 次多項式に対する仮定から $R(k)$ は整数となる。

任意の k に対して $R(k)$ が整数なので，

$P(k)$ の階差 $\cdots,\ P(-1)-P(-2),\ P(0)-P(-1),\ P(1)-P(0),\ \cdots$ がすべて整数になる。

$P(0)$ が整数なので，帰納的にすべての k に対して $P(k)$ は整数となる。

(ｉ)(ⅱ)より，数学的帰納法によって題意は示された。

[別解 2]

まず，次の補題を数学的帰納法により証明する。

（補題）　0 以上の整数 i に対し，

$$\begin{cases} p_0(x)=1 \\ p_i(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-i)}{i!} \quad (i \geqq 1) \end{cases}$$ とおく。

このとき，一般の n 次多項式 $P(x)$ ($n \geqq 0$) は， $p_i(x)$ の線形結合として表される。

すなわち，適当な実数 c_i を用いて，

$$P(x)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_np_n(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}c_ip_i(x)$$

（ｉ）$n=0$ のとき

$P(x)=c_0\cdot 1=c_0$ より成り立つ。

（ⅱ）$n=0, 1, 2, \cdots, k$ のとき，補題が成り立つと仮定すると，

任意の（$k+1$）次多項式 $f(x)=a_{k+1}x^{k+1}+a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$ に対して

$g(x)=f(x)-a_{k+1}(k+1)!\,p_{k+1}(x)$ とおくと

$g(x)$ は高々 k 次の多項式で，帰納法の仮定より $g(x)$ は $p_i(x)$ の線形結合として表され，

$f(x)=a_{k+1}(k+1)!\,p_{k+1}(x)+\sum_{i=0}^{k}c_ip_i(x)$ と表せることになる。

$a_{k+1}(k+1)!=c_{k+1}$ とおくことにより（$k+1$）次多項式 $f(x)$ も $p_i(x)$ の線形結合で表されることがわかる。

よって，(ｉ)(ⅱ)より数学的帰納法により補題は示された。

$P(x)$ を補題の $p_i(x)$ を用いて $P(x)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_np_n(x)$ とおく。

このとき， $P(0)=c_0-c_1+c_2-c_3+\cdots+c_{n-1}$

$P(1)=c_0$

$P(2)=c_0+c_1$

$P(3)=c_0+2c_1+c_2$

$\vdots$

$$P(n)=c_0+{}_n\mathrm{C}_1c_1+{}_n\mathrm{C}_2c_2+\cdots+c_{n-1}$$

となるので,

「 $P(1),\ P(2),\ \cdots,\ P(n)$ がすべて整数」⇔「 $c_0,\ c_1,\cdots,\ c_n$ がすべて整数」

が成り立つ。

　また，連続する m 個の整数の積は， $m!$ の倍数であるから，任意の整数 k に対して $p_i(k)$ は整数で

あるので， $P(k)=c_0p_0(x)+c_1p_1(x)+\cdots+c_np_n(x)$ は整数である。

よって題意は示された。

［ 東京工業大学 2008 年 第 1 類特別入試 $\boxed{3}$ ］

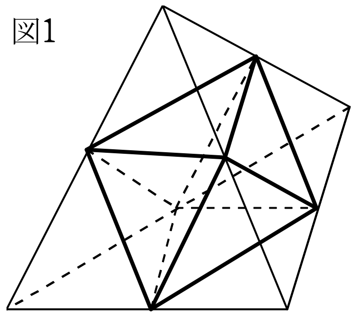
☆────────────────────────────────────☆

正 4 面体を，底面に平行な（$n-1$）枚の平面で高さを n 等分するように切る。

残りの面に関しても同様に切ると正 4 面体は幾つの部分に分かれるか，個数を求めよ。

☆────────────────────────────────────☆

図1



正 4 面体 ABCD の辺の長さを n とする。

また，底面 BCD に平行で高さを n 等分する平面を

上から $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ とする。

さらに，底面に平行で点 A を通る平面を P_0，底面を P_n とする。

分かれる立体を U とする。

U は隣り合った平面 P_{k-1}, P_k によって切り取られるので，P_k に平行な U の面の数は 2 以下である。

他の平面による切り方についても同様であるから，U の面の数は 8 以下 …① である。

また，P_k 上にできる切り口は図 2（$k=4$ のとき）のようになるので，

図2

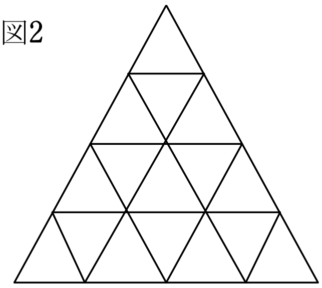
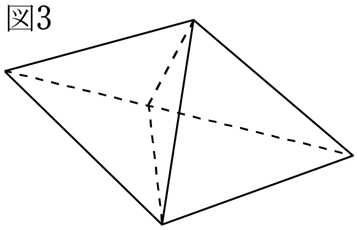


図3



U の面はすべて合同な正 3 角形 …②

①，②より U は正 4 面体，双 3 角錐（図 3 のように正 4 面体を 2 つ重ね合わせたもの），

正 8 面体のいずれかである。

ここで，U が双 3 角錐になるには，ABCD を互いに平行でない 6 平面で切る必要があるが，いまは

ABCD の 4 面に平行な平面で切るので不適。

よって，U は 1 辺の長さが 1 の「正 4 面体」または「正 8 面体」…③ となる。

P_{k-1} と P_k の間にある U を U_k とする。

ABCD を切ったとき，P_{k-1}, P_k 上にできる切り口を真上から重ねて見る（図 4 は $k=4$ の場合で，P_{k-1}

上は実線，P_k 上は破線で表している）。

図4

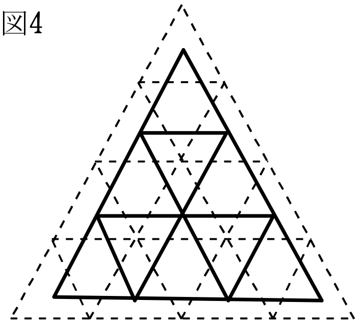


図5

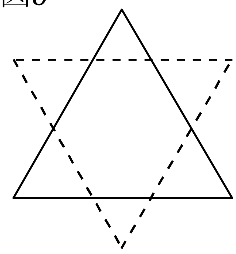
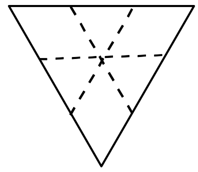


図6



このとき，実線の 1 辺の正 3 角形△，▽に対して，破線は必ずそれぞれ図 5，図 6 のようになる。

よって，③よりU_kは，図 5 のとき正 8 面体，図 6 のとき下向きの正 4 面体である。

また，破線の 1 辺 1 の正 3 角形 △ を 1 つの面とするU_kは上向きの正四面体である。

よって，U_kのうち，上向きの正 4 面体，正 8 面体，下向きの正 4 面体の個数をそれぞれ $a_k,\ b_k,\ c_k$ と

すると，$b_k = a_{k-1},\ c_k = b_{k-1}$， $a_k = 1 + 2 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

U_kの個数は， $k \geqq 3$のとき

$$
\begin{aligned}
a_k + b_k + c_k &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k-1)k}{2} + \frac{(k-2)(k-1)}{2} \\
&= \frac{3k^2 - 3k + 2}{2} \\
&= \frac{3k(k-1)+2}{2} \quad \cdots ④
\end{aligned}
$$

図 1 よりU_1の個数は 1，U_2の個数は 4 であるから，④は $k = 1,\ 2$ でも成り立つ。

したがって，U の個数は

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{3k(k-1)+2}{2} &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{(k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k}{2} + 1 \right\} \\
&= \frac{(n-1)n(n+1)}{2} + n \\
&= \frac{n(n^2+1)}{2}
\end{aligned}
$$

[東京工業大学 2008 年 第 1 類特別入試 $\boxed{4}$]

☆────────────────────────────────────☆

p を正数とし，S を $y^2=4px$ と表示される放物線とする。点 $\mathrm{P}=(a,\ b)$ から S への法線が何本引けるか，場合分けして述べよ。

☆────────────────────────────────────☆

$S: x=\dfrac{y^2}{4p}$ より $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{y}{2p}$ であるから，

S 上の点 $\left(\dfrac{t^2}{4p},\ t\right)$ $(t\neq 0)$ における接線の傾きは $\dfrac{2p}{t}$ であり，

方向ベクトルの 1 つは $(t,\ 2p)$ である（$t=0$ でも成り立つ）。

よって，法線の方程式は $\begin{pmatrix} t \\ 2p \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-\dfrac{t^2}{4p} \\ y-t \end{pmatrix}=0$ であり，

これが $(a,\ b)$ を通るには，$t\left(a-\dfrac{t^2}{4p}\right)+2p(b-t)=0$

すなわち $t^3-4p(a-2p)t-8p^2b=0$ …① を満たす実数 t が存在すればよい。

実数 t の個数と S の法線の本数は 1 対 1 に対応しているので，

t の 3 次方程式①の実数解の個数を考える。

$f(t)=t^3-4p(a-2p)t-8p^2b$ とおくと，$f'(t)=3t^2-4p(a-2p)$ …②

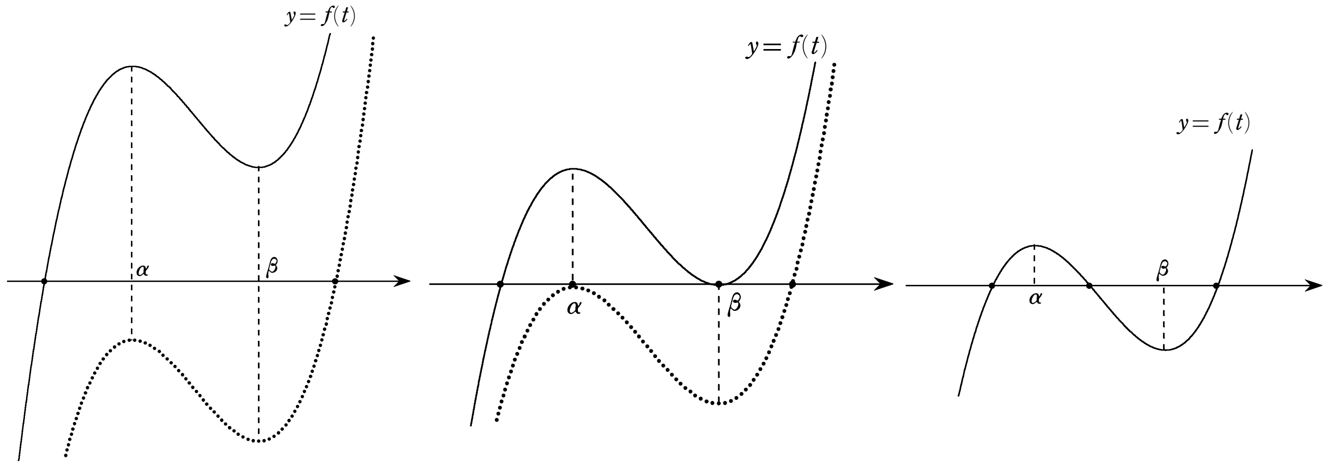
（i）$a-2p\leqq 0$ のとき

$p>0$ より $f'(t)\geqq 0$ であるから $f(t)$ は単調増加。

よって，3 次方程式 $f(t)=0$ の実数解の個数は 1 個。

（ⅱ）$a-2p>0$のとき

$f'(t)=0$ は相異なる実数解を２個もつ。これらを$\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$とおく。



図より，①の実数解の個数は

$f(\alpha)f(\beta)>0$のとき １個，$f(\alpha)f(\beta)=0$のとき ２個，$f(\alpha)f(\beta)<0$のとき ３個 …（＊）

②より α,βは $\pm\sqrt{\dfrac{4p(a-2p)}{3}}$ であり，$A=\dfrac{4p(a-2p)}{3}$ とおくと

$\alpha=-\sqrt{A},\ \beta=\sqrt{A},\ f(t)=t^3-3At-8p^2b$ であるから

$$f(\alpha)f(\beta)=\left(2A\sqrt{A}-8p^2b\right)\left(-2A\sqrt{A}-8p^2b\right)$$

$$=-4A^3+\left(8p^2b\right)^2$$

$$=-4\left\{\frac{4p(a-2p)}{3}\right\}^3+\left(8p^2b\right)^2$$

$$=\frac{4^3p^3}{3^3}\left\{-4(a-2p)^3+27pb^2\right\}$$

したがって，（＊）より $f(t)=0$ の実数解の個数がわかる。

$a-2p\leqq 0$のとき $4(a-2p)^3\leqq 0\leqq 27pb^2$ （等号成立は $(a,\ b)=(2p,\ 0)$ のとき）であることに注意すると，点PからSへの法線の本数は

$4(a-2p)^3<27pb^2$ または $(a,\ b)=(2p,\ 0)$のとき １本

$4(a-2p)^3=27pb^2$ かつ$(a,\ b)\neq(2p,\ 0)$ のとき ２本

$4(a-2p)^3>27pb^2$ のとき ３本