[東京工業大学 2008 年 第 1 類特別入試 $\boxed{4}$]

☆ ☆

p を正数とし，S を $y^2 = 4px$ と表示される放物線とする。点 $\mathrm{P} = (a,\ b)$ から S への法線が何本引けるか，場合分けして述べよ。

☆ ☆

$S : x = \dfrac{y^2}{4p}$ より $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{2p}$ であるから，

S 上の点 $\left(\dfrac{t^2}{4p},\ t\right)$ $(t \neq 0)$ における接線の傾きは $\dfrac{2p}{t}$ であり，

方向ベクトルの 1 つは $(t,\ 2p)$ である（$t = 0$ でも成り立つ)。

よって，法線の方程式は $\begin{pmatrix} t \\ 2p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \dfrac{t^2}{4p} \\ y - t \end{pmatrix} = 0$ であり，

これが $(a,\ b)$ を通るには，$t\left(a - \dfrac{t^2}{4p}\right) + 2p(b - t) = 0$

すなわち $t^3 - 4p(a - 2p)t - 8p^2 b = 0$ …① を満たす実数 t が存在すればよい。

実数 t の個数と S の法線の本数は 1 対 1 に対応しているので，

t の 3 次方程式①の実数解の個数を考える。

$f(t) = t^3 - 4p(a - 2p)t - 8p^2 b$ とおくと，$f'(t) = 3t^2 - 4p(a - 2p)$ …②

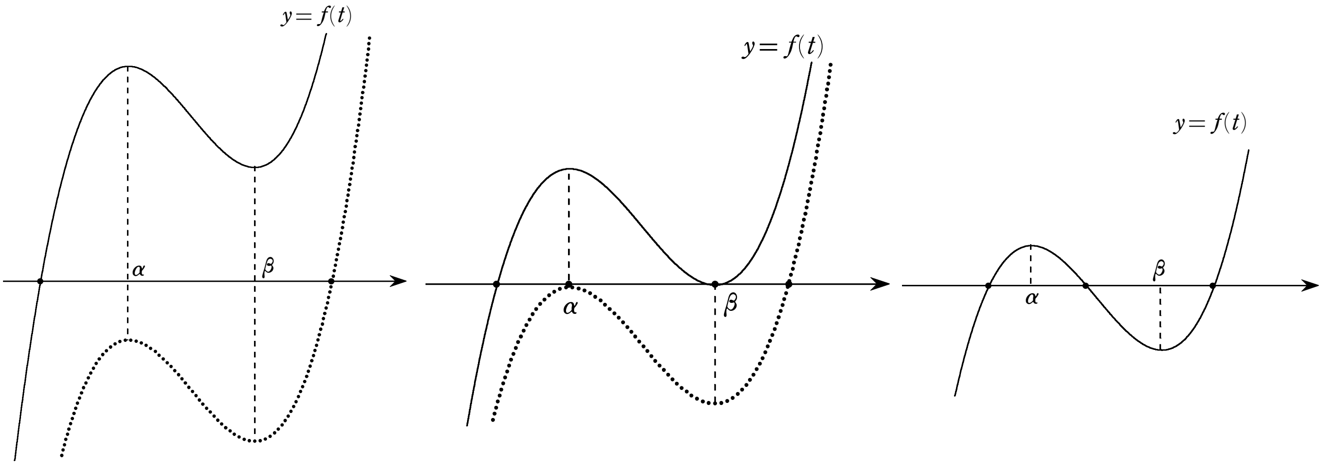
（i）$a - 2p \leqq 0$ のとき

$p > 0$ より $f'(t) \geqq 0$ であるから $f(t)$ は単調増加。

よって，3 次方程式 $f(t) = 0$ の実数解の個数は 1 個。

（ⅱ）$a-2p>0$のとき

$f'(t)=0$ は相異なる実数解を 2 個もつ。これらを$\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$とおく。



図より，①の実数解の個数は

$f(\alpha)f(\beta)>0$のとき 1 個， $f(\alpha)f(\beta)=0$のとき 2 個， $f(\alpha)f(\beta)<0$のとき 3 個　…（＊）

②より α, βは $\pm\sqrt{\dfrac{4p(a-2p)}{3}}$ であり， $A=\dfrac{4p(a-2p)}{3}$ とおくと

$\alpha=-\sqrt{A},\ \beta=\sqrt{A},\ f(t)=t^3-3At-8p^2b$ であるから

$$f(\alpha)f(\beta)=\left(2A\sqrt{A}-8p^2b\right)\left(-2A\sqrt{A}-8p^2b\right)$$

$$=-4A^3+\left(8p^2b\right)^2$$

$$=-4\left\{\frac{4p(a-2p)}{3}\right\}^3+\left(8p^2b\right)^2$$

$$=\frac{4^3p^3}{3^3}\left\{-4(a-2p)^3+27pb^2\right\}$$

したがって，（＊）より $f(t)=0$ の実数解の個数がわかる。

$a-2p\leqq 0$のとき $4(a-2p)^3\leqq 0\leqq 27pb^2$ （等号成立は $(a,\ b)=(2p,\ 0)$ のとき）であることに注意すると，点Pから S への法線の本数は

$4(a-2p)^3<27pb^2$ または $(a,\ b)=(2p,\ 0)$のとき 1 本

$4(a-2p)^3=27pb^2$ かつ$(a,\ b)\neq(2p,\ 0)$ のとき 2 本

$4(a-2p)^3>27pb^2$ のとき 3 本