[東京工業大学 2008 年 第 1 類特別入試 $\boxed{3}$]

☆ ☆

正 4 面体を，底面に平行な（$n-1$）枚の平面で高さを n 等分するように切る。

残りの面に関しても同様に切ると正 4 面体は幾つの部分に分かれるか，個数を求めよ。

☆ ☆

正 4 面体 ABCD の辺の長さを n とする。

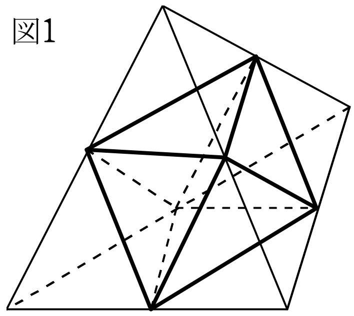
また，底面 BCD に平行で高さを n 等分する平面を

上から $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ とする。

さらに，底面に平行で点 A を通る平面を P_0，底面を P_n とする。

分かれる立体を U とする。

図1



U は隣り合った平面 P_{k-1}, P_k によって切り取られるので，P_k に平行な U の面の数は 2 以下である。

他の平面による切り方についても同様であるから，U の面の数は 8 以下 …① である。

また，P_k 上にできる切り口は図 2（$k=4$ のとき）のようになるので，

図2

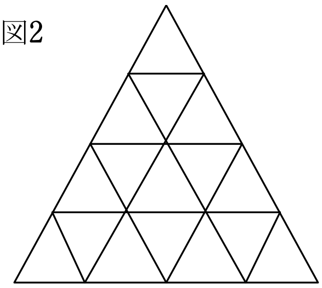
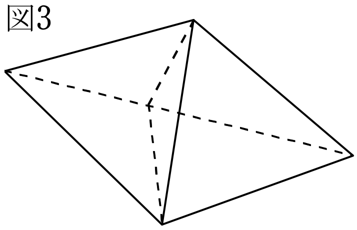


図3



U の面はすべて合同な正 3 角形 …②

①，②より U は正 4 面体，双 3 角錐（図 3 のように正 4 面体を 2 つ重ね合わせたもの），

正 8 面体のいずれかである。

ここで，U が双 3 角錐になるには，ABCD を互いに平行でない 6 平面で切る必要があるが，いまは

ABCD の 4 面に平行な平面で切るので不適。

よって，U は 1 辺の長さが 1 の「正 4 面体」または「正 8 面体」…③ となる。

P_{k-1} と P_k の間にある U を U_k とする。

ABCD を切ったとき，P_{k-1}, P_k 上にできる切り口を真上から重ねて見る（図 4 は $k=4$ の場合で，P_{k-1}

上は実線，P_k 上は破線で表している）。

図4

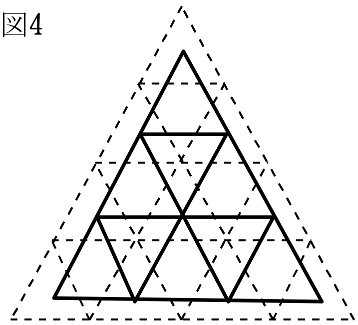


図5

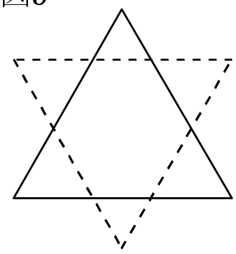
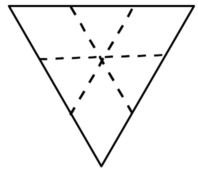


図6



このとき，実線の１辺の正３角形△，▽に対して，破線は必ずそれぞれ図５，図６のようになる。

よって，③よりU_kは，図５のとき正８面体，図６のとき下向きの正４面体である。

また，破線の１辺１の正３角形△を１つの面とするU_kは上向きの正四面体である。

よって，U_kのうち，上向きの正４面体，正８面体，下向きの正４面体の個数をそれぞれ a_k, b_k, c_k と

すると，$b_k = a_{k-1}, c_k = b_{k-1}$， $a_k = 1+2+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

U_kの個数は， $k \geqq 3$のとき

$$
\begin{aligned}
a_k + b_k + c_k &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k-1)k}{2} + \frac{(k-2)(k-1)}{2} \\
&= \frac{3k^2 - 3k + 2}{2} \\
&= \frac{3k(k-1)+2}{2} \quad \cdots ④
\end{aligned}
$$

図１よりU_1の個数は１，U_2の個数は４であるから，④は $k = 1, 2$ でも成り立つ。

したがって，Uの個数は

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{3k(k-1)+2}{2} &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{(k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k}{2} + 1 \right\} \\
&= \frac{(n-1)n(n+1)}{2} + n \\
&= \frac{n(n^2+1)}{2}
\end{aligned}
$$