

[東京工業大学 2008 年 第 1 類特別入試 2]



n を自然数, $P(x)$ を n 次多項式とする。 $P(0), P(1), \dots, P(n)$ が整数ならば, すべての自然数 k に対し, $P(k)$ は整数であることを証明せよ。



「 n 次多項式 $P(x)$ に対して, $P(0), P(1), \dots, P(n)$ が整数ならば,

すべての整数 k に対し, $P(k)$ は整数」…①

であることを, 次数 n に関する数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき

$P(x) = ax + b$ とおくことができる。

$P(0) = b, P(1) = a + b$ がともに整数なので,

$a = P(1) - P(0), b = P(0)$ はともに整数である。

よって, すべての整数 k に対し, $P(k) = ak + b$ は整数であるから①が成り立つ。

(ii) $n = m (\geq 1)$ のとき, ①が成り立つと仮定する。

$R(x)$ を 「 $m+1$ 次多項式で, $R(0), R(1), \dots, R(m+1)$ は整数」…②

を満たすものとする。このとき,

$$R(x+1) - R(x) = \{a(x+1)^{m+1} + \dots\} - (ax^{m+1} + \dots) = (m \text{ 次式})$$

であるから, m 次多項式 $P(x)$ を用いて

$$R(x+1) - R(x) = P(x) \quad \dots \text{③}$$

と表すことができる。

よって②より, $P(0), P(1), \dots, P(m)$ は整数

であるから帰納法の仮定①より, すべての整数 k に対して $P(k)$ は整数である。

よって③より, $R(\ell)$ が整数ならば,

$$R(\ell+1) = P(\ell) + R(\ell), \quad R(\ell-1) = R(\ell) - P(\ell-1) \quad \text{はともに整数である。}$$

これと, $R(0)$ が整数であることより, 帰納的にすべての整数 k に対し, $R(k)$ は整数となる。

従って, $n = m+1$ のときも①は成り立つ。

(i)(ii)より, 数学的帰納法によって題意は示された。

[別解]

「 n 次多項式 $P(x)$ に対して、 $P(0), P(1), \dots, P(n)$ が整数ならば、

すべての整数 k に対し、 $P(k)$ は整数」…①

であることを、次数 n に関する数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき

$P(x) = ax + b$ とおくことができる。

$P(0) = b, P(1) = a + b$ がともに整数なので、

$a = P(1) - P(0), b = P(0)$ はともに整数である。

よって、すべての整数 k に対し、 $P(k) = ak + b$ は整数であるから①が成り立つ。

(ii) $n = m (\geq 1)$ のとき、①が成り立つと仮定する。

このとき、

「 $m+1$ 次多項式 $P(x)$ に対して、 $P(0), P(1), \dots, P(m+1)$ が整数ならば、

すべての整数 k に対し、 $P(k)$ は整数となること」を示す。

$R(x) = P(x+1) - P(x)$ とおくと、 $R(x)$ は(高々) m 次式であり、仮定より

$$R(0) = P(1) - P(0)$$

$$R(1) = P(2) - P(1)$$

⋮

$$R(m) = P(m+1) - P(m)$$

はすべて整数であり、 m 次多項式に対する仮定から $R(k)$ は整数となる。

任意の k に対して $R(k)$ が整数なので、

$P(k)$ の階差 $\dots, P(-1) - P(-2), P(0) - P(-1), P(1) - P(0), \dots$ がすべて整数になる。

$P(0)$ が整数なので、帰納的にすべての k に対して $P(k)$ は整数となる。

(i)(ii)より、数学的帰納法によって題意は示された。

[別解 2]

まず、次の補題を数学的帰納法により証明する。

(補題) 0以上の整数*i*に対し、

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_i(x) = \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-i)}{i!} \quad (i \geq 1) \end{cases} \text{とおく。}$$

このとき、一般の*n*次多項式*P*(*x*) (*n* ≥ 0)は、*p_i*(*x*)の線形結合として表される。

すなわち、適当な実数*c_i*を用いて、

$$\begin{aligned} P(x) &= c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_n p_n(x) \\ &= \sum_{i=0}^n c_i p_i(x) \end{aligned}$$

(i) *n* = 0 のとき

$$P(x) = c_0 \cdot 1 = c_0 \text{ より成り立つ。}$$

(ii) *n* = 0, 1, 2, ..., *k* のとき、補題が成り立つと仮定すると、

任意の (*k* + 1) 次多項式 $f(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_kx^k + \cdots + a_1x + a_0$ に対して

$$g(x) = f(x) - a_{k+1}(k+1)!p_{k+1}(x) \text{ とおくと}$$

g(*x*)は高々*k*次の多項式で、帰納法の仮定より*g*(*x*)は*p_i*(*x*)の線形結合として表され、

$$f(x) = a_{k+1}(k+1)!p_{k+1}(x) + \sum_{i=0}^k c_i p_i(x) \text{ と表せることになる。}$$

$a_{k+1}(k+1)! = c_{k+1}$ とおくことにより (*k* + 1) 次多項式 *f*(*x*) も *p_i*(*x*) の線形結合で表されることがわかる。

よって、(i)(ii)より数学的帰納法により補題は示された。

P(*x*)を補題の*p_i*(*x*)を用いて $P(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_n p_n(x)$ とおく。

このとき、 $P(0) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots + c_{n-1}$

$$P(1) = c_0$$

$$P(2) = c_0 + c_1$$

$$P(3) = c_0 + 2c_1 + c_2$$

⋮

$$P(n) = c_0 + \binom{n}{1}c_1 + \binom{n}{2}c_2 + \cdots + c_{n-1}$$

となるので,

「 $P(1), P(2), \dots, P(n)$ がすべて整数」 \Leftrightarrow 「 c_0, c_1, \dots, c_n がすべて整数」

が成り立つ。

また、連続する m 個の整数の積は、 $m!$ の倍数であるから、任意の整数 k に対して $p_i(k)$ は整数であるので、 $P(k) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_n p_n(x)$ は整数である。

よって題意は示された。