[東京工業大学 2008 年 第１類特別入試 $\boxed{1}$]

この試験は現時点での諸君の論理的理解力の習熟度を測るためのものであり，あまりに乱暴な字ではその役に立ちません。できるだけ丁寧な字で，採点員が論理を追い易いように各自工夫し，結論をはっきりと記述して下さい。

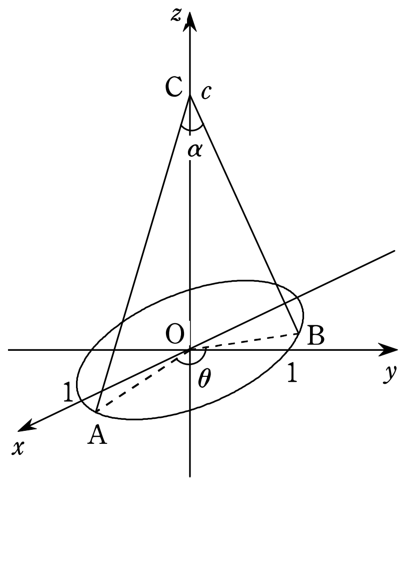
$0<\alpha<\pi$ とする。xyz-空間上の３点 A, B, C は次の条件(ｉ)，(ii)，(iii)をみたすように配置してあるとする。

（ｉ）A, B は原点を中心とする xy-平面上の半径１の円周上にある。

（ii）C は z-軸の正の部分にある。

（iii）$\angle\mathrm{ACB}=\alpha$。

(ｉ), (ii), (iii)を満たす A, B, C と原点 O が作る４面体 OABC のうち体積が最大のものの体積を $V(\alpha)$ とする。このとき極限値 $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\alpha V(\alpha)$ を求めよ。



$\angle\mathrm{AOB}=\theta\quad(0<\theta<\pi)$，$\mathrm{C}(0,\,0,\,c)\quad(c>0)$ とおく。

△OAB において余弦定理より $\mathrm{AB}^2=1+1-2\cos\theta=2(1-\cos\theta)$

また，$\mathrm{CA}=\mathrm{CB}=\sqrt{1+c^2}$ であり，△CAB において余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2=(1+c^2)+(1+c^2)-2(1+c^2)\cos\alpha=2(1+c^2)(1-\cos\alpha)$$

したがって $2(1-\cos\theta)=2(1+c^2)(1-\cos\alpha)$

$c>0$ であるから $c=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1-\cos\alpha}-1}=\sqrt{\dfrac{\cos\alpha-\cos\theta}{1-\cos\alpha}}$ となる。

四面体 OABC の体積は

$$\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{OC}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\sin\theta\cdot c\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{\sin^2\theta\cdot\frac{\cos\alpha-\cos\theta}{1-\cos\alpha}}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\left(1-\cos^2\theta\right)\left(\cos\alpha-\cos\theta\right)}{1-\cos\alpha}}\quad\cdots①$$

ここで，$t=\cos\theta\quad(-1<t<1)$ とおき，

$f(t)=\left(1-t^2\right)\left(\cos\alpha-t\right)=t^3-\left(\cos\alpha\right)t^2-t+\cos\alpha$ とおくと，

$f'(t)=3t^2-2\left(\cos\alpha\right)t-1\quad\cdots②$

$f'(0)=-1$ であり，$0<\alpha<\pi$ より

$f'(\pm1)=3\mp2\cos\alpha-1=2(1\mp\cos\alpha)>0$ （複号同順）であるから

t の方程式 $f'(t)=0$ は $-1<t<1$ に相異なる実数解を 2 個もつ。

これらを $t_0, t_1\quad(t_0<t_1)$ とすると，$f(t)$ の増減は下表に従う。

t	(-1)	$\cdots$	t_0	$\cdots$	t_1	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		＋	0	－	0	＋	
$f(t)$		↗		↘		↗	(0)

$t=t_0$ のときに $f(t)$ は最大となる。

よって，$\alpha V(\alpha)=\dfrac{1}{6}\alpha\sqrt{\dfrac{\left(1-{t_0}^2\right)\left(\cos\alpha-t_0\right)}{1-\cos\alpha}}\quad\cdots③$

ここで，t_0 は $②=3t^2-2(\cos\alpha)t-1=0$ の解のうちの小さい方であり，

$$t_0=\frac{\cos\alpha-\sqrt{\cos^2\alpha+3}}{3}\xrightarrow{\alpha\to0}-\frac{1}{3}$$

また，$\displaystyle\lim_{\alpha\to0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{2}$ なので，

$$③=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\alpha^2}{1-\cos\alpha}}\cdot\sqrt{\left(1-{t_0}^2\right)\left(\cos\alpha-t_0\right)}\xrightarrow{\alpha\to0}\frac{1}{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right\}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{8}{9}\cdot\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{27}$$