[東京工業大学 2008 年後期 $\boxed{1}$]

(1) 実数 $a_1,\ a_2,\ x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2$ が

$$0 < a_1 \leqq a_2$$

$$a_1x_1 \leqq a_1y_1$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leqq a_1y_1 + a_2y_2$$

をみたしているとする。このとき $x_1 + x_2 \leqq y_1 + y_2$ であることを証明せよ。

(2) n を 2 以上の整数とし，$3n$ 個の実数 $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n,\ x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n,\ y_1,\ y_2, \cdots,\ y_n$ が

$$0 < a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$$

および n 個の不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{j} a_i x_i \leqq \sum_{i=1}^{j} a_i y_i\ (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

をみたしているならば,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} y_i$$

であることを証明せよ。

---

(1) $0 < a_1 \leqq a_2$ より，$\dfrac{1}{a_1} \geqq \dfrac{1}{a_2} > 0$ である。

$a_1x_1 \leqq a_1y_1$ の両辺に $\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2} (\geqq 0)$ をかけて

$$\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) a_1x_1 \leqq \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) a_1y_1 \quad \cdots ①$$

$a_1x_1 + a_2x_2 \leqq a_1y_1 + a_2y_2$ の両辺に $\dfrac{1}{a_2} (> 0)$ をかけて

$$\frac{1}{a_2} \cdot a_1x_1 + \frac{1}{a_2} \cdot a_2x_2 \leqq \frac{1}{a_2} \cdot a_1y_1 + \frac{1}{a_2} \cdot a_2y_2 \quad \cdots ②$$

①，②を辺々加えると

$$\left\{\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \frac{1}{a_2}\right\} a_1x_1 + x_2 \leqq \left\{\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \frac{1}{a_2}\right\} a_1y_1 + y_2$$

$$\Leftrightarrow\ x_1 + x_2 \leqq y_1 + y_2$$

を得る。

⑵ $0 < a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ より $\dfrac{1}{a_1} \geqq \dfrac{1}{a_2} \geqq \cdots \geqq \dfrac{1}{a_n} > 0$ である。

a_1x_1

$a_1x_1 + a_2x_2$

………

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n$

のそれぞれに $\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2},\ \dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_3},\ \cdots,\ \dfrac{1}{a_{n-1}} - \dfrac{1}{a_n},\ \dfrac{1}{a_n}$ をかけて加えると

$x_k\ (1 \leqq k \leqq n)$ の係数は

（i）$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき

$$\left\{\sum_{j=k}^{n-1}\left(\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_{j+1}}\right) + \frac{1}{a_n}\right\} \cdot a_k = \left\{\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_n}\right) + \frac{1}{a_n}\right\} \cdot a_k = 1$$

（ii）$k = n$ のとき

$$\frac{1}{a_n} \cdot a_n = 1$$

となる。

よって，n 個の不等式

$a_1x_1 \leqq a_1y_1$

$a_1x_1 + a_2x_2 \leqq a_1y_1 + a_2y_2$

………

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqq a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n$

に同様の操作をすると $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ を得る。

[東京工業大学 2008 年後期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

自然数 n に対して $I_n=\int_0^1 x^2|\sin n\pi x|dx$ とおく。極限値 $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

☆ ☆

$J_k=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^2|\sin n\pi x|dx \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とおくと $I_n=\sum_{k=1}^{n} J_k$ であり，

$\frac{k-1}{n}\leqq x\leqq\frac{k}{n}$ において $\left(\frac{k-1}{n}\right)^2|\sin n\pi x|\leqq x^2|\sin n\pi x|\leqq\left(\frac{k}{n}\right)^2|\sin n\pi x|$ が成り立つ。

したがって $\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\sin n\pi x|dx\leqq J_k\leqq\left(\frac{k}{n}\right)^2\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\sin n\pi x|dx$ であり，

$|\sin n\pi x|$ の周期は $\frac{1}{n}$ であるから

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\sin n\pi x|dx=\int_0^{\frac{1}{n}}|\sin n\pi x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{n}}\sin n\pi x\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_0^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{2}{n\pi}$$

よって，$\frac{2}{n\pi}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\leqq J_k\leqq\frac{2}{n\pi}\left(\frac{k}{n}\right)^2$ が成り立つ。

したがって $\frac{2}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\leqq\sum_{k=1}^{n}J_k=I_n\leqq\frac{2}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$ …① であり，

$n\to\infty$ のとき，①の左辺と右辺は $\frac{2}{\pi}\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3\pi}$ となるので

はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} I_n=\frac{2}{3\pi}$ となる。