[東京工業大学 2008 年後期 $\boxed{2}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――☆

自然数nに対して $I_n=\int_0^1 x^2|\sin n\pi x|dx$ とおく。極限値 $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――☆

$J_k=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^2|\sin n\pi x|dx \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とおくと $I_n=\sum_{k=1}^{n} J_k$ であり，

$\frac{k-1}{n}\leqq x\leqq\frac{k}{n}$ において $\left(\frac{k-1}{n}\right)^2|\sin n\pi x|\leqq x^2|\sin n\pi x|\leqq\left(\frac{k}{n}\right)^2|\sin n\pi x|$ が成り立つ。

したがって $\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\sin n\pi x|dx\leqq J_k\leqq\left(\frac{k}{n}\right)^2\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\sin n\pi x|dx$ であり，

$|\sin n\pi x|$の周期は $\frac{1}{n}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\sin n\pi x|dx&=\int_0^{\frac{1}{n}}|\sin n\pi x|dx\\&=\int_0^{\frac{1}{n}}\sin n\pi x\,dx\\&=\left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_0^{\frac{1}{n}}\\&=\frac{2}{n\pi}\end{aligned}$$

よって，$\frac{2}{n\pi}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\leqq J_k\leqq\frac{2}{n\pi}\left(\frac{k}{n}\right)^2$ が成り立つ。

したがって $\frac{2}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\leqq\sum_{k=1}^{n}J_k=I_n\leqq\frac{2}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$ …① であり，

$n\to\infty$ のとき，①の左辺と右辺は $\frac{2}{\pi}\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3\pi}$ となるので

はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} I_n=\frac{2}{3\pi}$ となる。