



(1) 実数 $a_1, a_2, x_1, x_2, y_1, y_2$ が

$$0 < a_1 \leq a_2$$

$$a_1 x_1 \leq a_1 y_1$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq a_1 y_1 + a_2 y_2$$

をみたしているとする。このとき $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$ であることを証明せよ。

(2) n を 2 以上の整数とし、 $3n$ 個の実数 $a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ が

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

および n 個の不等式 $\sum_{i=1}^j a_i x_i \leq \sum_{i=1}^j a_i y_i$ ($j=1, 2, \dots, n$)

をみたしているならば、

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n y_i$$

であることを証明せよ。



(1) $0 < a_1 \leq a_2$ より、 $\frac{1}{a_1} \geq \frac{1}{a_2} > 0$ である。

$a_1 x_1 \leq a_1 y_1$ の両辺に $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$ (≥ 0) をかけて

$$\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) a_1 x_1 \leq \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) a_1 y_1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq a_1 y_1 + a_2 y_2$ の両辺に $\frac{1}{a_2}$ (> 0) をかけて

$$\frac{1}{a_2} \cdot a_1 x_1 + \frac{1}{a_2} \cdot a_2 x_2 \leq \frac{1}{a_2} \cdot a_1 y_1 + \frac{1}{a_2} \cdot a_2 y_2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②を辺々加えると

$$\left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \frac{1}{a_2} \right\} a_1 x_1 + x_2 \leq \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \frac{1}{a_2} \right\} a_1 y_1 + y_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$$

を得る。

(2) $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ より $\frac{1}{a_1} \geq \frac{1}{a_2} \geq \dots \geq \frac{1}{a_n} > 0$ である。

$$a_1 x_1$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2$$

.....

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n$$

のそれぞれに $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_n}$ をかけて加えると

x_k ($1 \leq k \leq n$) の係数は

(i) $1 \leq k \leq n-1$ のとき

$$\left\{ \sum_{j=k}^{n-1} \left(\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_{j+1}} \right) + \frac{1}{a_n} \right\} \cdot a_k = \left\{ \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_n} \right) + \frac{1}{a_n} \right\} \cdot a_k = 1$$

(ii) $k = n$ のとき

$$\frac{1}{a_n} \cdot a_n = 1$$

となる。

よって、 n 個の不等式

$$a_1 x_1 \leq a_1 y_1$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq a_1 y_1 + a_2 y_2$$

.....

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \leq a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n$$

に同様の操作をすると $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq y_1 + y_2 + \dots + y_n$ を得る。