[東京工業大学 2008 年前期 $\boxed{1}$]

正の実数 $a,\ b$ に対し， $x>0$ で定義された 2 つの関数 x^a と $\log bx$ のグラフが 1 点で接するとする。

(1) 接点の座標 $(s,\ t)$ を a を用いて表せ。また， b を a の関数として表せ。

(2) $0<h<s$ をみたす h に対し，直線 $x=h$ および 2 つの曲線 $y=x^a,\ y=\log bx$ で囲まれる領域の面積を $A(h)$ とする。$\lim\limits_{h\to 0} A(h)$ を a で表せ。

---

(1) $f(x)=x^a,\ g(x)=\log bx$ とおく。

$\begin{cases} t=f(s)=g(s) \\ s=f'(s)=g'(s) \end{cases}$ であり， $f'(x)=ax^{a-1},\ g(x)=\dfrac{1}{x}$ なので $\begin{cases} t=s^a=\log bs & \cdots ① \\ as^{a-1}=\dfrac{1}{s} & \cdots ② \end{cases}$ となる。

②より $s^a=\dfrac{1}{a}$ すなわち $s=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{a}}}$

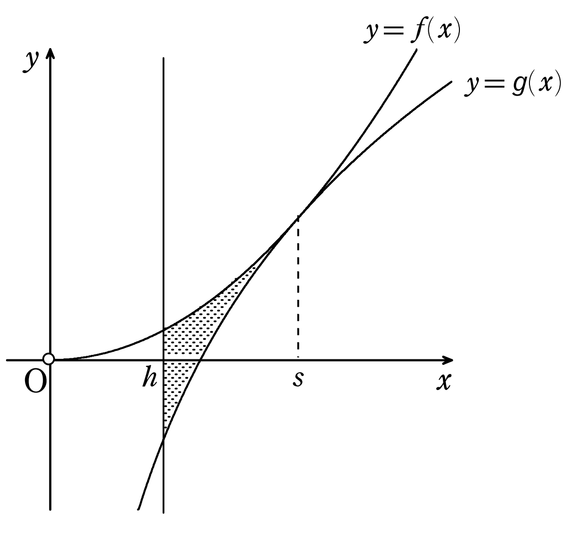
これを①に代入して $t=\dfrac{1}{a}=\log\dfrac{b}{a^{\frac{1}{a}}}$ よって $e^{\frac{1}{a}}=\dfrac{b}{a^{\frac{1}{a}}}$ から $b=(ea)^{\frac{1}{a}}$

してがって $(s,\ t)=\left(\dfrac{1}{a^{\frac{1}{a}}},\ \dfrac{1}{a}\right),\ b=(ea)^{\frac{1}{a}}$

(2) $p(x)=f(x)-g(x)$ とおくと $p'(x)=ax^{a-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax^a-1}{x}$ である。

$as^a=1$ であるから $0<x<s$ のとき $p'(x)<0$

$s<x$ のとき $p'(x)>0$ となる。



さらに $p(s)=0$ であるから

$f(x),\ g(x)$ のグラフは，右図のようになる。

$p(x)$ の原始関数の 1 つを

$P(x)=\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}-(x\log bx-x)$ とおくと

$A(h)=\displaystyle\int_h^s p(x)\,dx$

$\quad =P(s)-P(h)$

$\quad =\dfrac{1}{a+1}s^{a+1}-(s\log bs-s)-\dfrac{1}{a+1}h^{a+1}+(h\log bh-h)$

ここで，$\lim_{h\to 0} A(h)$ の式に現れる極限について，$\lim_{h\to 0} h\log h = 0$ であることを証明する。

$F(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ とおくと $F'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}$ であり

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$

$F(x) > 0$ となる。よって $-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ が成り立ち，

$0 < x < 1$ において $-2\sqrt{x} < x\log x < 0$ となるので，

はさみうちの原理から $\lim_{x\to 0} x\log x = 0$

よって $\displaystyle\lim_{h\to 0} A(h) = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{a+1}s^{a+1} - \left(s\log bs - s\right) - \frac{1}{a+1}h^{a+1} + \left(h\log bh - h\right)\right\}$

$$= \frac{1}{a+1}s^{a+1} - s\log bs + s$$

$$= s\left(\frac{1}{a+1}s^{a} - \log bs + 1\right)$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{1}{a}}}\left(\frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{a} - \frac{1}{a} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{1}{a}}}\left(\cancel{\frac{1}{a}} - \frac{1}{a+1} - \cancel{\frac{1}{a}} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{1}{a}}}\left(\frac{a}{a+1}\right)$$

$$= \frac{a^{1-\frac{1}{a}}}{a+1}$$

[注] $\lim_{h\to 0} h\log h = 0$ は不定形であり，自明ではないので証明を解答に入れておいた。

証明なしで用いた場合，減点となるかどうかはわからない。

[東京工業大学 2008 年前期 $\boxed{2}$]

☆―――☆

実数 x に対し，x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする。a, b を正の実数とするとき，極限

$$\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)$$

が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ。

☆―――☆

$f(x)$ の定め方より $ax-7 \leqq f(ax-7) < (ax-7)+1$ が成り立つ。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}$ のときを考えるので，$x>0$ のときは $\displaystyle a-\frac{7}{x} \leqq \frac{f(ax-7)}{x} < a-\frac{6}{x}$ が成り立つ。

よって，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(ax-7)}{x}=a$ …①

同様にして $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(bx+3)}{x}=b$ …② を得る。

(ｉ) $a \neq b$ のとき

$$x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)=x^{c-1}\left(\frac{x}{f(ax-7)}-\frac{x}{f(bx+3)}\right) \quad \cdots ③ \text{ であるから}$$

①，②より $x\to\infty$ のときに③が収束するような c の最大値は $c=1$ である。

このときの極限値は $\displaystyle\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$

(ii) $a=b$ のとき

$ax+3 \leqq f(ax+3) < (ax+3)+1$

$\Leftrightarrow$ $ax+3 \leqq f(ax+3) < ax+4$ …④ であり，

$ax-7 \leqq f(ax-7) < (ax-7)+1$

$\Leftrightarrow$ $ax-7 \leqq f(ax-7) < ax-6$ $\Leftrightarrow$ $-(ax-6) < -f(ax-7) \leqq -(ax-7)$ …⑤ である。

④，⑤を辺々加えると

$(ax+3)-(ax-6) < f(ax+3)-f(ax-7) < ax+4-(ax-7)$

$\Leftrightarrow$ $9 < f(ax+3)-f(ax-7) < 11$

となるが，$f(bx-3)-f(ax-7)$ は整数であるから $f(bx-3)-f(ax-7)=10$

よって　$x^c\left(\dfrac{1}{f(ax-7)}-\dfrac{1}{f(bx+3)}\right)=x^c\cdot\dfrac{f(bx-3)-f(ax-7)}{f(ax-7)\cdot f(bx+3)}$

$$=x^c\cdot\frac{10}{f(ax-7)\cdot f(bx+3)}$$

$$=10x^{c-2}\cdot\frac{x}{f(ax-7)}\cdot\frac{x}{f(bx+3)}\quad\cdots⑥$$ であるから

①，②より　$x\to\infty$　のときに⑥が収束するようなcの最大値は　$c=2$　である。

このときの極限値は　$10\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}=\dfrac{10}{ab}=\dfrac{10}{a^2}$

[注]　$f(bx-3)-f(ax-7)=10$　となることについては上記のようにきちんと示したが，

「$(bx-3)-(ax-7)=10$　であり，これは整数であるから　$f(bx-3)-f(ax-7)=10$」

と済ませてもよいと思う。

［ 東京工業大学 2008 年前期 $\boxed{3}$ ］

いびつなサイコロがあり，1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ とは限らないとする。このサイコロを 2 回ふったとき同じ目が出る確率を P とし，1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする。

(1) $\mathrm{P} \geqq \dfrac{1}{6}$ であることを示せ。また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{4} \geqq \mathrm{Q} \geqq \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{P}$ であることを示せ。

(1) k の目が出る確率を p_k とおくと

$p_k \geqq 0\ (1 \leqq k \leqq 6)$， $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ …①であり，

$\mathrm{P} = {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 + {p_4}^2 + {p_5}^2 + {p_6}^2$ である。

Schwarz の不等式より

$$(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)({p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 + {p_4}^2 + {p_5}^2 + {p_6}^2)$$

$$\geqq (1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 + 1 \cdot p_4 + 1 \cdot p_5 + 1 \cdot p_6) = 1$$

が成り立つので $6\mathrm{P} \geqq 1$ したがって $\mathrm{P} \geqq \dfrac{1}{6}$ である。

等号成立は，$1:1:\cdots:1 = p_1 : p_2 : \cdots : p_6$ のときであり，

①より $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \dfrac{1}{6}$ のとき。

(2) $u = p_1 + p_3 + p_5$，$v = p_2 + p_4 + p_6$ とおくと $\mathrm{Q} = uv$ …② である。

(i) 〔 $\dfrac{1}{4} \geqq \mathrm{Q}$ であること 〕

相加平均・相乗平均の関係式より $\dfrac{u+v}{2} \geqq \sqrt{uv}$

$u + v = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$ であり，①，②から $\dfrac{1}{2} \geqq \sqrt{\mathrm{Q}}$

したがって $\dfrac{1}{4} \geqq \mathrm{Q}$ が成り立つ。

等号成立は，$u = v$ すなわち $p_1 + p_3 + p_5 = p_2 + p_4 + p_6 = \dfrac{1}{2}$ のとき。

(ⅱ) 〔 $\mathrm{Q} \geqq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{P}$ であること〕

Schwarz の不等式より

$$(1^2+1^2+1^2)({p_1}^2+{p_3}^2+{p_5}^2) \geqq (1\cdot p_1+1\cdot p_3+1\cdot p_5)^2$$

$$3({p_1}^2+{p_3}^2+{p_5}^2) \geqq u^2 \quad \cdots ③$$

同様にして $(1^2+1^2+1^2)({p_2}^2+{p_4}^2+{p_6}^2) \geqq (1\cdot p_2+1\cdot p_4+1\cdot p_6)^2$

$$3({p_2}^2+{p_4}^2+{p_6}^2) \geqq v^2 \quad \cdots ④$$

③，④を辺々加えて $3({p_1}^2+{p_2}^2+{p_3}^2+{p_4}^2+{p_5}^2+{p_6}^2) \geqq u^2+v^2$

$$3\mathrm{P} \geqq u^2+v^2$$

ここで，$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv$

$=1-2\mathrm{Q}$　であるから

$3\mathrm{P} \geqq 1-2\mathrm{Q}$ すなわち $\mathrm{Q} \geqq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{P}$ が成り立つ。

等号成立は，③と④の等号成立を考えて $p_1=p_3=p_5$ かつ $p_2=p_4=p_6$ のとき。

(ⅰ)，(ⅱ)より $\frac{1}{4} \geqq \mathrm{Q} \geqq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{P}$

（証明終）

[注] 解答で用いた「Schwarz の不等式」は次の通り。

実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ に対して $\left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2\right) \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$ が成り立つ。

等号成立は $a_1 : a_2 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n$ のときに限る。

[別解]

(1) $\mathrm{P}-\dfrac{1}{6}=p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2-\dfrac{1}{6}$

$$=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_2-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_3-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_4-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_5-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_6-\frac{1}{6}\right)^2$$

$$+\frac{1}{3}(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)-6\times\left(\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}$$

$$=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_2-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_3-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_4-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_5-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_6-\frac{1}{6}\right)^2$$

$$+\frac{1}{3}\cdot1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}$$

$$=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_2-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_3-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_4-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_5-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_6-\frac{1}{6}\right)^2 \geqq 0$$

等号成立は　$p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=\dfrac{1}{6}$　のとき。

(2) $u=p_1+p_3+p_5$，$v=p_2+p_4+p_6$　とおくと　$\mathrm{Q}=uv$　であり，

$1-4\mathrm{Q}=1-4uv=(u+v)^2-4uv=(u-v)^2\geqq 0$

よって　$\dfrac{1}{4}\geqq\mathrm{Q}$

等号成立は，$u=v$　すなわち　$p_1+p_3+p_5=p_2+p_4+p_6=\dfrac{1}{2}$　のとき。

また，$3\mathrm{P}+2\mathrm{Q}-1=3(p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2)+2(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)$

$$-(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)^2$$

$$=2(p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2)-2(p_1p_3+p_1p_5+p_3p_5+p_2p_4+p_2p_6+p_4p_6)$$

$$=(p_1-p_3)^2+(p_1-p_5)^2+(p_3-p_5)^2+(p_2-p_4)^2+(p_2-p_6)^2+(p_4-p_6)^2\geqq 0$$

よって　$\mathrm{Q}\geqq\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{P}$

等号成立は，$p_1=p_3=p_5$　かつ　$p_2=p_4=p_6$　のとき。

よって　$\dfrac{1}{4}\geqq\mathrm{Q}\geqq\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{P}$　　　　（証明終）

[東京工業大学 2008 年前期 $\boxed{4}$]

☆ ☆

平面の原点Oを端点とし，x 軸となす角がそれぞれ $-\alpha,\ \alpha$（ただし $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$）である半直線を $L_1,\ L_2$ とする。L_1 上に点P，L_2 上に点Qを線分PQの長さが1となるようにとり，点Rを，直線PQに対し原点Oの反対側に△PQRが正三角形になるようにとる。

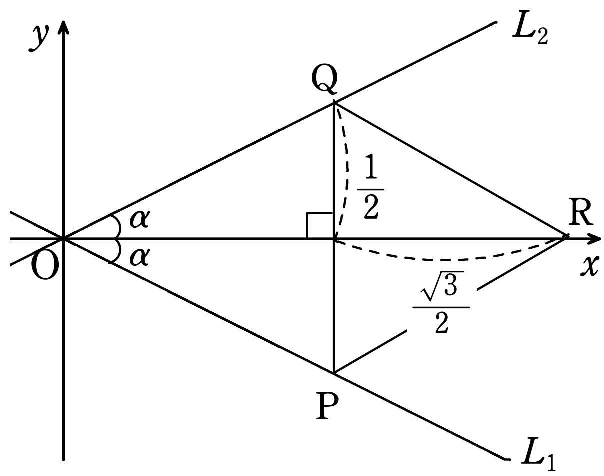
(1) 線分PQが x 軸と直交するとき，点Rの座標を求めよ。

(2) 2点P, Qが，線分PQの長さを1に保ったまま $L_1,\ L_2$ 上を動くとき，点Rの軌跡はある楕円の一部であることを示せ。

☆ ☆

(1) P, Qの x 座標は $\dfrac{\frac{1}{2}}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{2\tan\alpha}$ であるから，

Rの座標は $\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2\tan\alpha}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ である。



(2) $m=\tan\alpha$ とおくと，

P, Qの座標は $\mathrm{P}(p,\ -mp)$，$\mathrm{Q}(q,\ mq)$ と表せる。

PQの長さが1であることから

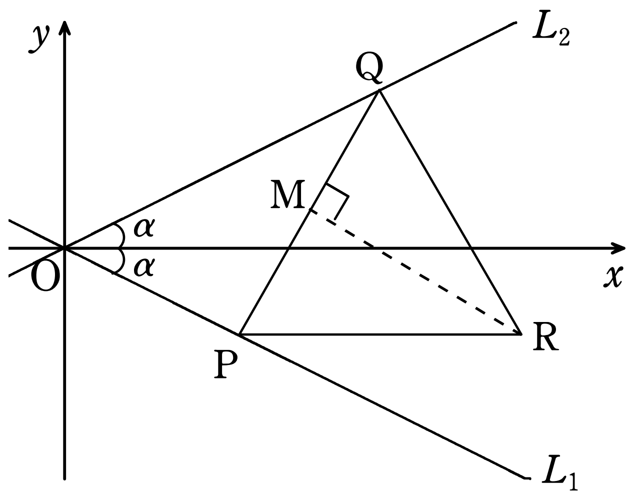
$\mathrm{PQ}^2=(p-q)^2+m^2(p+q)^2=1$ …①

PQの中点をMとすると，$\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix} q-p \\ m(p+q) \end{pmatrix}$ を $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転し，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 倍したものであるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q-p \\ m(p+q) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q-p \\ m(p+q) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} m(p+q) \\ p-q \end{pmatrix}$$ となる。



よって $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p+q \\ m(q-p) \end{pmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} m(p+q) \\ p-q \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1+\sqrt{3}m)(p+q) \\ (\sqrt{3}-m)(p-q) \end{pmatrix}$$ となる。

したがって $\mathrm{R}(x,\ y)$ とおくと

$$x=\frac{(1+\sqrt{3}m)(p+q)}{2},\ y=\frac{(\sqrt{3}-m)(p-q)}{2}$$

であり，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$ より $0<m<\sqrt{3}$ であることに注意して，①より

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}-m}y\right)^2+m^2\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}m}x\right)^2=1 \iff \frac{4m^2}{(1+\sqrt{3}m)^2}x^2+\frac{4}{(\sqrt{3}-m)^2}y^2=1 \quad \cdots②$$

よって，R の軌跡は，楕円②の一部である。

（証明終）