[東京工業大学 2008 年前期 $\boxed{1}$]

正の実数 a, b に対し， $x>0$ で定義された 2 つの関数 x^a と $\log bx$ のグラフが 1 点で接するとする。

(1) 接点の座標 (s, t) を a を用いて表せ。また， b を a の関数として表せ。

(2) $0<h<s$ をみたす h に対し，直線 $x=h$ および 2 つの曲線 $y=x^a$, $y=\log bx$ で囲まれる領域の面積を $A(h)$ とする。$\lim_{h\to 0} A(h)$ を a で表せ。

[東京工業大学 2008 年前期 $\boxed{2}$]

実数 x に対し，x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする。a, b を正の実数とするとき，極限

$$\lim_{x\to\infty} x^c \left(\frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)} \right)$$

が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ。

[東京工業大学 2008 年前期 $\boxed{3}$]

いびつなサイコロがあり，1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ とは限らないとする。このサイコロを 2 回ふったとき同じ目が出る確率を P とし，1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする。

(1) $P \geqq \dfrac{1}{6}$ であることを示せ。また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{4} \geqq Q \geqq \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}P$ であることを示せ。

[東京工業大学 2008 年前期 $\boxed{4}$]

平面の原点Oを端点とし，x 軸となす角がそれぞれ $-\alpha,\ \alpha$（ただし $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$）である半直線を $L_1,\ L_2$ とする。L_1 上に点P，L_2 上に点Qを線分PQの長さが1となるようにとり，点Rを，直線PQに対し原点Oの反対側に△PQRが正三角形になるようにとる。

(1) 線分PQが x 軸と直交するとき，点Rの座標を求めよ。

(2) 2点P, Qが，線分PQの長さを1に保ったまま $L_1,\ L_2$ 上を動くとき，点Rの軌跡はある楕円の一部であることを示せ。