[東京工業大学 2008 年前期 $\boxed{4}$]

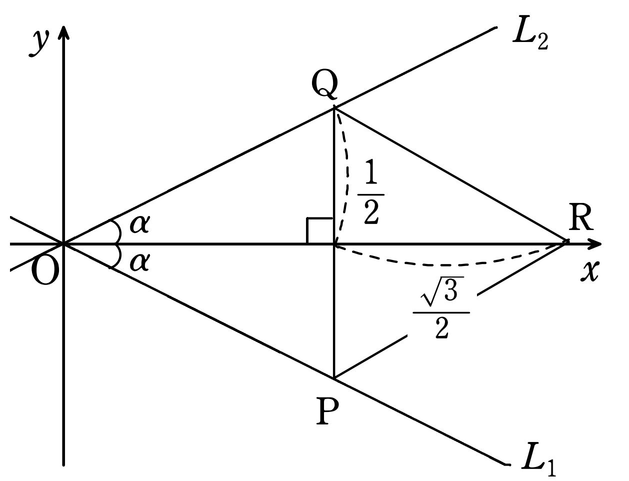
平面の原点Oを端点とし，x軸となす角がそれぞれ$-\alpha,\ \alpha$（ただし$0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$）である半直線を$L_1,\ L_2$とする。L_1上に点P，L_2上に点Qを線分PQの長さが1となるようにとり，点Rを，直線PQに対し原点Oの反対側に△PQRが正三角形になるようにとる。

(1) 線分PQがx軸と直交するとき，点Rの座標を求めよ。

(2) 2点P, Qが，線分PQの長さを1に保ったまま$L_1,\ L_2$上を動くとき，点Rの軌跡はある楕円の一部であることを示せ。

(1) P, Qのx座標は $\dfrac{\frac{1}{2}}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{2\tan\alpha}$ であるから，

Rの座標は $\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2\tan\alpha}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ である。



(2) $m=\tan\alpha$ とおくと，

P, Qの座標は$\mathrm{P}(p,\ -mp)$，$\mathrm{Q}(q,\ mq)$ と表せる。

PQの長さが1であることから

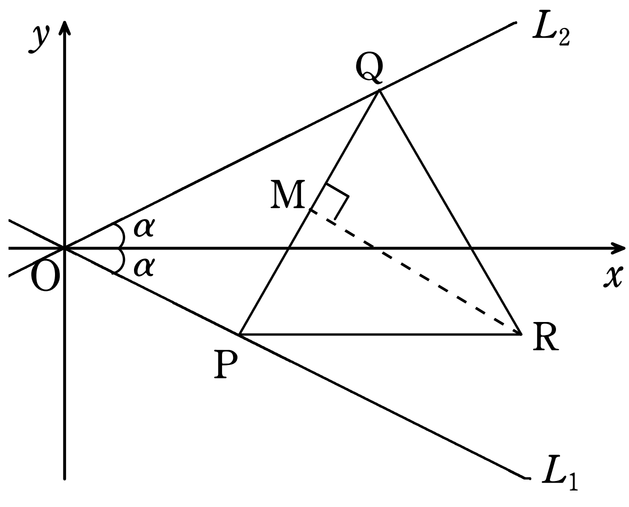
$\mathrm{PQ}^2=(p-q)^2+m^2(p+q)^2=1$ …①

PQの中点をMとすると，$\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix} q-p \\ m(p+q) \end{pmatrix}$ を$-\dfrac{\pi}{2}$回転し，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$倍したものであるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q-p \\ m(p+q) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q-p \\ m(p+q) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} m(p+q) \\ p-q \end{pmatrix}$$ となる。



よって $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p+q \\ m(q-p) \end{pmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} m(p+q) \\ p-q \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1+\sqrt{3}m)(p+q) \\ (\sqrt{3}-m)(p-q) \end{pmatrix}$$ となる。

したがって $\mathrm{R}(x,\ y)$ とおくと

$$x=\frac{(1+\sqrt{3}m)(p+q)}{2},\ y=\frac{(\sqrt{3}-m)(p-q)}{2}$$

であり，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$ より $0<m<\sqrt{3}$ であることに注意して，①より

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}-m}y\right)^2+m^2\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}m}x\right)^2=1 \iff \frac{4m^2}{(1+\sqrt{3}m)^2}x^2+\frac{4}{(\sqrt{3}-m)^2}y^2=1 \quad \cdots ②$$

よって，R の軌跡は，楕円②の一部である。

（証明終）