[東京工業大学 2008 年前期 $\boxed{3}$]

☆ ☆

いびつなサイコロがあり，1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ とは限らないとする。このサイコロを 2 回ふったとき同じ目が出る確率を P とし，1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする。

(1) $\mathrm{P} \geqq \dfrac{1}{6}$ であることを示せ。また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{4} \geqq \mathrm{Q} \geqq \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{P}$ であることを示せ。

☆ ☆

(1) k の目が出る確率を p_k とおくと

$p_k \geqq 0\ (1 \leqq k \leqq 6)$， $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ …①であり，

$\mathrm{P} = {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 + {p_4}^2 + {p_5}^2 + {p_6}^2$ である。

Schwarz の不等式より

$$(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)({p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 + {p_4}^2 + {p_5}^2 + {p_6}^2)$$

$$\geqq (1\cdot p_1 + 1\cdot p_2 + 1\cdot p_3 + 1\cdot p_4 + 1\cdot p_5 + 1\cdot p_6) = 1$$

が成り立つので $6\mathrm{P} \geqq 1$ したがって $\mathrm{P} \geqq \dfrac{1}{6}$ である。

等号成立は，$1:1:\cdots:1 = p_1 : p_2 : \cdots : p_6$ のときであり，

①より $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \dfrac{1}{6}$ のとき。

(2) $u = p_1 + p_3 + p_5$，$v = p_2 + p_4 + p_6$ とおくと $\mathrm{Q} = uv$ …② である。

(i) 〔 $\dfrac{1}{4} \geqq \mathrm{Q}$ であること 〕

相加平均・相乗平均の関係式より $\dfrac{u+v}{2} \geqq \sqrt{uv}$

$u + v = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$ であり，①，②から $\dfrac{1}{2} \geqq \sqrt{\mathrm{Q}}$

したがって $\dfrac{1}{4} \geqq \mathrm{Q}$ が成り立つ。

等号成立は，$u = v$ すなわち $p_1 + p_3 + p_5 = p_2 + p_4 + p_6 = \dfrac{1}{2}$ のとき。

(ⅱ) 〔 $\mathrm{Q} \geqq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{P}$ であること〕

Schwarz の不等式より

$$(1^2+1^2+1^2)({p_1}^2+{p_3}^2+{p_5}^2) \geqq (1\cdot p_1+1\cdot p_3+1\cdot p_5)^2$$

$$3({p_1}^2+{p_3}^2+{p_5}^2) \geqq u^2 \quad \cdots③$$

同様にして $(1^2+1^2+1^2)({p_2}^2+{p_4}^2+{p_6}^2) \geqq (1\cdot p_2+1\cdot p_4+1\cdot p_6)^2$

$$3({p_2}^2+{p_4}^2+{p_6}^2) \geqq v^2 \quad \cdots④$$

③，④を辺々加えて $3({p_1}^2+{p_2}^2+{p_3}^2+{p_4}^2+{p_5}^2+{p_6}^2) \geqq u^2+v^2$

$$3\mathrm{P} \geqq u^2+v^2$$

ここで，$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv$

$=1-2\mathrm{Q}$ 　であるから

$3\mathrm{P} \geqq 1-2\mathrm{Q}$ すなわち $\mathrm{Q} \geqq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{P}$ が成り立つ。

等号成立は，③と④の等号成立を考えて $p_1=p_3=p_5$ かつ $p_2=p_4=p_6$ のとき。

(ⅰ)，(ⅱ)より $\frac{1}{4} \geqq \mathrm{Q} \geqq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{P}$

（証明終）

[注] 解答で用いた「Schwarz の不等式」は次の通り。

実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ に対して $\left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2\right) \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$ が成り立つ。

等号成立は $a_1 : a_2 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n$ のときに限る。

[別解]

(1) $\mathrm{P}-\dfrac{1}{6}=p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2-\dfrac{1}{6}$

$$=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_2-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_3-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_4-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_5-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_6-\frac{1}{6}\right)^2$$

$$+\frac{1}{3}(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)-6\times\left(\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}$$

$$=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_2-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_3-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_4-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_5-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_6-\frac{1}{6}\right)^2$$

$$+\frac{1}{3}\cdot 1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}$$

$$=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_2-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_3-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_4-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_5-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_6-\frac{1}{6}\right)^2 \geqq 0$$

等号成立は　$p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=\dfrac{1}{6}$　のとき。

(2) $u=p_1+p_3+p_5$，$v=p_2+p_4+p_6$　とおくと　$\mathrm{Q}=uv$　であり，

$1-4\mathrm{Q}=1-4uv=(u+v)^2-4uv=(u-v)^2\geqq 0$

よって　$\dfrac{1}{4}\geqq \mathrm{Q}$

等号成立は，$u=v$　すなわち　$p_1+p_3+p_5=p_2+p_4+p_6=\dfrac{1}{2}$　のとき。

また，$3\mathrm{P}+2\mathrm{Q}-1=3(p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2)+2(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)$

$$-(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)^2$$

$$=2(p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2)-2(p_1p_3+p_1p_5+p_3p_5+p_2p_4+p_2p_6+p_4p_6)$$

$$=(p_1-p_3)^2+(p_1-p_5)^2+(p_3-p_5)^2+(p_2-p_4)^2+(p_2-p_6)^2+(p_4-p_6)^2\geqq 0$$

よって　$\mathrm{Q}\geqq\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{P}$

等号成立は，$p_1=p_3=p_5$　かつ　$p_2=p_4=p_6$　のとき。

よって　$\dfrac{1}{4}\geqq \mathrm{Q}\geqq\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{P}$　　　　（証明終）