[東京工業大学 2008 年前期 $\boxed{2}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

実数 x に対し，x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする。$a,\ b$ を正の実数とするとき，極限

$$\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)$$

が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)$ の定め方より $ax-7 \leqq f(ax-7) < (ax-7)+1$ が成り立つ。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}$ のときを考えるので，$x>0$ のときは $a-\dfrac{7}{x} \leqq \dfrac{f(ax-7)}{x} < a-\dfrac{6}{x}$ が成り立つ。

よって，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(ax-7)}{x}=a$ …①

同様にして $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(bx+3)}{x}=b$ …② を得る。

(ｉ) $a \neq b$ のとき

$$x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)=x^{c-1}\left(\frac{x}{f(ax-7)}-\frac{x}{f(bx+3)}\right)$$ …③ であるから

①，②より $x\to\infty$ のときに③が収束するような c の最大値は $c=1$ である。

このときの極限値は $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$

(ii) $a=b$ のとき

$ax+3 \leqq f(ax+3) < (ax+3)+1$

$\Leftrightarrow$ $ax+3 \leqq f(ax+3) < ax+4$ …④ であり，

$ax-7 \leqq f(ax-7) < (ax-7)+1$

$\Leftrightarrow$ $ax-7 \leqq f(ax-7) < ax-6$ $\Leftrightarrow$ $-(ax-6) < -f(ax-7) \leqq -(ax-7)$ …⑤ である。

④，⑤を辺々加えると

$(ax+3)-(ax-6) < f(ax+3)-f(ax-7) < ax+4-(ax-7)$

$\Leftrightarrow$ $9 < f(ax+3)-f(ax-7) < 11$

となるが，$f(bx-3)-f(ax-7)$ は整数であるから $f(bx-3)-f(ax-7)=10$

よって $x^c\left(\dfrac{1}{f(ax-7)}-\dfrac{1}{f(bx+3)}\right)=x^c\cdot\dfrac{f(bx-3)-f(ax-7)}{f(ax-7)\cdot f(bx+3)}$

$$=x^c\cdot\frac{10}{f(ax-7)\cdot f(bx+3)}$$

$=10x^{c-2}\cdot\dfrac{x}{f(ax-7)}\cdot\dfrac{x}{f(bx+3)}$ …⑥ であるから

①，②より $x\to\infty$ のときに⑥が収束するような c の最大値は $c=2$ である。

このときの極限値は $10\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}=\dfrac{10}{ab}=\dfrac{10}{a^2}$

[注] $f(bx-3)-f(ax-7)=10$ となることについては上記のようにきちんと示したが，

「$(bx-3)-(ax-7)=10$ であり，これは整数であるから $f(bx-3)-f(ax-7)=10$」

と済ませてもよいと思う。