[東京工業大学 2008 年前期 $\boxed{1}$]

正の実数 $a,\ b$ に対し，$x>0$ で定義された 2 つの関数 x^a と $\log bx$ のグラフが 1 点で接するとする。

(1) 接点の座標 $(s,\ t)$ を a を用いて表せ。また，b を a の関数として表せ。

(2) $0<h<s$ をみたす h に対し，直線 $x=h$ および 2 つの曲線 $y=x^a,\ y=\log bx$ で囲まれる領域の面積を $A(h)$ とする。$\displaystyle\lim_{h\to 0}A(h)$ を a で表せ。

---

(1) $f(x)=x^a,\ g(x)=\log bx$ とおく。

$\begin{cases} t=f(s)=g(s) \\ s=f'(s)=g'(s) \end{cases}$ であり，$f'(x)=ax^{a-1},\ g(x)=\dfrac{1}{x}$ なので $\begin{cases} t=s^a=\log bs & \cdots① \\ as^{a-1}=\dfrac{1}{s} & \cdots② \end{cases}$ となる。

②より $s^a=\dfrac{1}{a}$ すなわち $s=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{a}}}$

これを①に代入して $t=\dfrac{1}{a}=\log\dfrac{b}{a^{\frac{1}{a}}}$ よって $e^{\frac{1}{a}}=\dfrac{b}{a^{\frac{1}{a}}}$ から $b=(ea)^{\frac{1}{a}}$

してがって $(s,\ t)=\left(\dfrac{1}{a^{\frac{1}{a}}},\ \dfrac{1}{a}\right),\ b=(ea)^{\frac{1}{a}}$

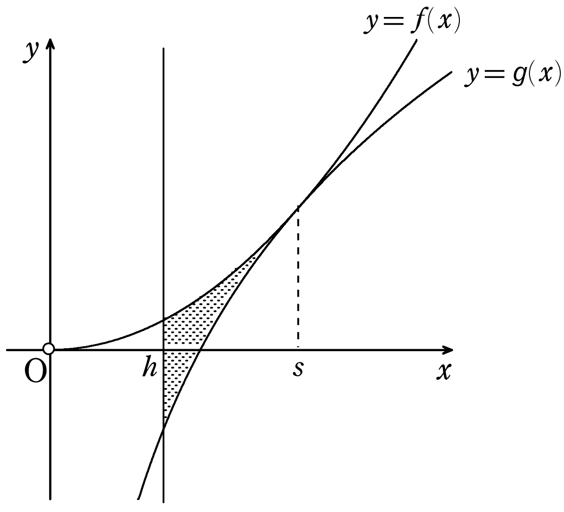
(2) $p(x)=f(x)-g(x)$ とおくと $p'(x)=ax^{a-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax^a-1}{x}$ である。

$as^a=1$ であるから $0<x<s$ のとき $p'(x)<0$

$s<x$ のとき $p'(x)>0$ となる。

さらに $p(s)=0$ であるから

$f(x),\ g(x)$ のグラフは，右図のようになる。



$p(x)$ の原始関数の 1 つを

$P(x)=\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}-\left(x\log bx-x\right)$ とおくと

$A(h)=\displaystyle\int_h^s p(x)\,dx$

$=P(s)-P(h)$

$=\dfrac{1}{a+1}s^{a+1}-\left(s\log bs-s\right)-\dfrac{1}{a+1}h^{a+1}+\left(h\log bh-h\right)$

ここで，$\lim_{h\to 0} A(h)$ の式に現れる極限について，$\lim_{h\to 0} h\log h = 0$ であることを証明する。

$F(x) = \log x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ とおくと $F'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}$ であり

$F(x) > 0$ となる。よって $-\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \log x$ が成り立ち，

$0 < x < 1$ において $-2\sqrt{x} < x\log x < 0$ となるので，

はさみうちの原理から $\lim_{x\to 0} x\log x = 0$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$		↘	2	↗

よって $\lim_{h\to 0} A(h) = \lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{1}{a+1}s^{a+1} - (s\log bs - s) - \dfrac{1}{a+1}h^{a+1} + (h\log bh - h)\right\}$

$$= \frac{1}{a+1}s^{a+1} - s\log bs + s$$

$$= s\left(\frac{1}{a+1}s^{a} - \log bs + 1\right)$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{1}{a}}}\left(\frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{a} - \frac{1}{a} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{1}{a}}}\left(\cancel{\frac{1}{a}} - \frac{1}{a+1} - \cancel{\frac{1}{a}} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{1}{a}}}\left(\frac{a}{a+1}\right)$$

$$= \frac{a^{1-\frac{1}{a}}}{a+1}$$

[注] $\lim_{h\to 0} h\log h = 0$ は不定形であり，自明ではないので証明を解答に入れておいた。

証明なしで用いた場合，減点となるかどうかはわからない。