[東京工業大学 2007 年 第１類ＡＯ型 $\boxed{1}$]

この試験は現時点での諸君の論理的理解力の習熟度を測るためのものであり，あまりに乱暴な字ではその役に立ちません。できるだけ丁寧な字で，採点員が論理を追い易いように各自工夫し，結論をはっきりと記述して下さい。

整数 $m=1, 2, \cdots$ に対して，実数 x の関数 $g_m(x)$ を $g_m(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2m}d\theta$ と定める。$g_m(x)$ の最小値を a_m，最大値を b_m とするとき，極限値 $\lim_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{b_m}$ を求めよ。

$g_m(x)$ の被積分関数 $(\sin\theta)^{2m}$ は周期 π の周期関数であるから $g_m(x+\pi)=g_m$ …① である。

したがって $0\leqq x<\pi$ で考えればよい。

$$g_m{}'(x)=\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{2m}-\left(\sin x\right)^{2m}=\left(\cos x\right)^{2m}-\left(\sin x\right)^{2m}$$

であるから $g_m(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$g_m{}'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g_m(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

①より $g_m(0)=g_m(\pi)$ であるから $a_m=g_m\left(\frac{3}{4}\pi\right),\ b_m=g_m\left(\frac{\pi}{4}\right)$ である。

ここで，$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$ で $0\leqq\left(\sin\theta\right)^{2m}\leqq\left(\sin\frac{3}{4}\pi\right)^{2m}$ であるから

$$0\leqq a_m=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\left(\sin\theta\right)^{2m}d\theta\leqq\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\left(\sin\frac{3}{4}\pi\right)^{2m}d\theta=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^{m}d\theta=\frac{1}{2^m}\cdot\frac{\pi}{2}\quad\cdots②$$

また，$\left(\sin\theta\right)^{2m}\geqq0$ なので

$$b_m = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin\theta)^{2m}\, d\theta \geqq \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} (\sin\theta)^{2m}\, d\theta$$

ここで，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ において $(\sin\theta)^{2m} \geqq \left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{2m}$ であるから

$$b_m \geqq \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2m} d\theta = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \left(\frac{3}{4}\right)^m d\theta = \left(\frac{3}{4}\right)^m \cdot \frac{\pi}{3} \quad \cdots ③$$

よって，②，③より $0 \leqq \dfrac{a_m}{b_m} \leqq \dfrac{\dfrac{1}{2^m}\cdot\dfrac{\pi}{2}}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^m \cdot \dfrac{\pi}{3}} = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^m$ となるが，

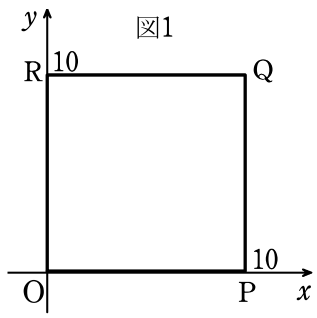
$\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^m \to 0$ であるから，はさみうちの原理より $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{a_m}{b_m} = 0$

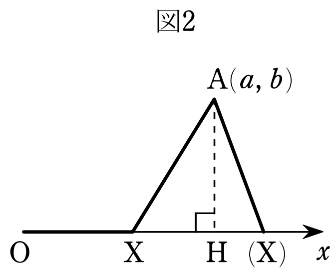
[東京工業大学 2007 年 第１類ＡＯ型 $\boxed{2}$]

一辺の長さが 10mの正方形のプールの一つの角に監視員を置く。この監視員は水中は秒速 1mでプールの縁上は秒速 2mで移動するとする。この監視員がこのプールのどこへでも到達しうるには，最短で何秒必要か計算せよ。ただし，物事を単純化するため，（ｉ）監視員は点，プールの縁は線と考え，（ⅱ）プールの縁上でも水中でもどの方向に曲ることも自由自在で，それぞれでの秒速は一定だとする。

図１のように，プールに座標を設定する。

点Ｏに監視員をおく。各点までの所要時間が最小になる場合を考えるので，水中では直進する。





まず，図２のように，点Ｏから x 軸上の点Ｘを経由して，水中の点 $\mathrm{A}(a, b)$ へ至る所要時間が最小になるＸを考える。

ＸがＨより右側にあるとき，所要時間に関して $\underbrace{\dfrac{\mathrm{OX}}{2}+\mathrm{XA}}_{\mathrm{O}\to\mathrm{X}\to\mathrm{A}} \geqq \underbrace{\dfrac{\mathrm{OH}}{2}+\mathrm{HA}}_{\mathrm{O}\to\mathrm{H}\to\mathrm{A}}$ が成り立つので，

ＸはＨの左側にある。

$\mathrm{XH}=s \quad (0 \leqq s \leqq a)$ とおくと，所要時間は $\dfrac{a-s}{2}+\sqrt{s^2+b^2}$ となり，これを $f(s)$ とすると

$f'(s)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{s}{\sqrt{s^2+b^2}}$ となる。

$f'(s)<0 \iff \dfrac{s}{\sqrt{s^2+b^2}}<\dfrac{1}{2} \iff \sqrt{s^2+b^2}>2s \ (\geqq 0) \iff s^2+b^2>4s^2 \iff b^2>3s^2$

であるから， $f(s)$ は $(0\leqq)\, s<\dfrac{b}{\sqrt{3}}$ のとき減少， $s>\dfrac{b}{\sqrt{3}}$ のとき増加する。

よって $f(s)$ が最小になるのは $s=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$ のときで，このとき $\angle\mathrm{OXA}=120^\circ$ である。

次に，図 3 のように，点Oから縁上の点X_1, X_2を経由して$A(10,\ b)$へ至る所要時間が最小になるX_1, X_2を考える。

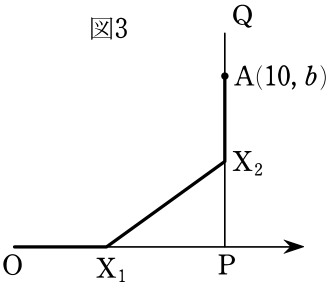


図3

$PX_1=s,\ PX_2=t\quad (0\leqq s\leqq 10,\ 0\leqq t\leqq b)$ とおく。

tを固定すると，所要時間が最小になるのは $s=\dfrac{t}{\sqrt{3}}$ のときである。

このとき，所要時間は $\dfrac{1}{2}\left(10-\dfrac{t}{\sqrt{3}}+b-t\right)+\dfrac{2t}{\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)t+10+b}{2}$

であるから，$t=0\ \left(X_1=X_2=P\right)$ のとき最小。

以上より，点Oから点$A(a,\ b)$へ至る所要時間が最小になる経路は図 4 か図 5 のどちらか。

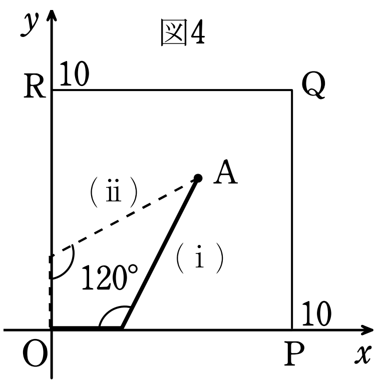


図4

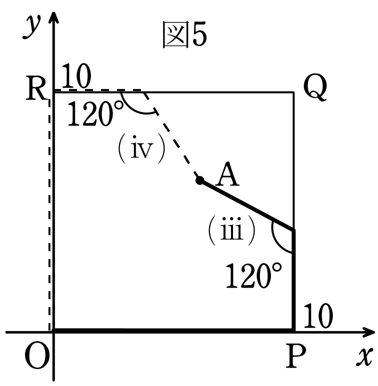


図5

所要時間は，$y=x$に関する対称性に注意して

（ⅰ）$\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)+\dfrac{2b}{\sqrt{3}}=\dfrac{a+\sqrt{3}b}{2}$

（ⅱ）$\dfrac{1}{2}\left(10+b-\dfrac{10-a}{\sqrt{3}}\right)+\dfrac{2(10-a)}{\sqrt{3}}=\dfrac{b-\sqrt{3}a}{\sqrt{3}}+5+5\sqrt{3}$

（ⅲ）$\dfrac{b+\sqrt{3}a}{2}$

（ⅳ）$\dfrac{a-\sqrt{3}b}{2}+5+5\sqrt{3}$

となる。

いま，Aは $x \geqq y$ の範囲にある（$a \geqq b$）としてよい。このとき，(ⅰ)≦(ⅱ)，(ⅲ)≦(ⅳ)であるから(ⅰ)，(ⅲ)の場合について考える。

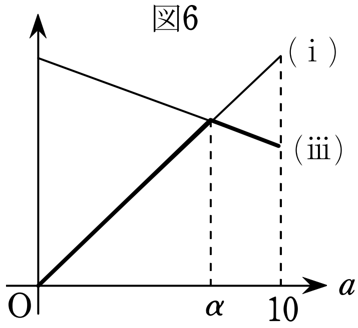
a を固定すると，(ⅰ)，(ⅲ)はどちらも $b=a$ のときに最大になるので，Aが $y=x$ 上にある場合（$a=b$）を考えればよい。よって，$a=b$ とし，$0 \leqq a \leqq 10$ で a を動かしたとき，(ⅰ)と(ⅲ)の小さい方の最大値が答えである。

(ⅰ)$=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}a$

(ⅲ)$=\dfrac{1-\sqrt{3}a}{2}+5\left(1+\sqrt{3}\right)$

をグラフに描くと，図6のようになる。

図6



$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{1-\sqrt{3}a}{2}+5\left(1+\sqrt{3}\right)$ より $a=\dfrac{5\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}=\alpha$ であるから

求める最短時間は $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{5\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}=5+\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ （秒）

［ 東京工業大学 2007 年 第１類ＡＯ型 $\boxed{3}$ ］

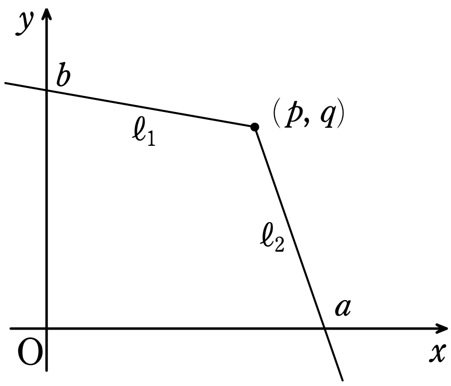
正の実数 $a,\ b$ に対して，以下の条件(1)，(2)，(3)を満たす関数 $f(x)$ が存在することを証明せよ。

(1) $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq a$ における連続な実数値関数で， $f(0)=b,\ f(a)=0$ を満たす。

(2) $0 \leqq x_1 < x_2 \leqq a$ なるすべての $x_1,\ x_2$ に対して $f(x_1) > f(x_2)$ である。

(3) $y=f(x)$ のグラフと x 軸， y 軸とで囲まれる部分を， x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V_x と y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V_y とは等しい。

正の実数 $p,\ q$ （$0<p<a,\ 0<q<b \cdots$①）に対し， $f(x)$ を次のように定める。



$x \leqq p$ のとき $\ell_1 : f(x) = -\dfrac{b-q}{p}x+b$

$x > p$ のとき $\ell_2 : f(x) = -\dfrac{q}{a-p}(x-a)$

このとき， $f(x)$ は(1)，(2)を満たす。

次に，(3)かつ①を満たす $p,\ q$ が存在すること $\cdots$② を示す。

$$V_x = \int_0^p \pi\left(-\frac{b-q}{p}x+b\right)^2 dx + \frac{\pi q^2(a-p)}{3}$$

$$= \left[-\frac{\pi p}{3(b-q)}\left(-\frac{b-q}{p}x+b\right)^3\right]_0^p + \frac{\pi q^2(a-p)}{3}$$

$$= \frac{\pi p(b^3-q^3)}{3(b-q)} + \frac{\pi q^2(a-p)}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left\{p\left(b^2+bq+q^2\right)+q^2\left(a-p\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(b^2p+bpq+aq^2\right)$$

V_y は a と b ， p と q を入れ替えて $V_y = \dfrac{\pi}{3}\left(a^2q+apq+bp^2\right)$

（ｉ） $a>b$ のとき

$q=-2p+b,\ 0<p<\dfrac{b}{2}$ とすれば，①を満たす。

さらに $\dfrac{3}{\pi}\left(V_x-V_y\right) = \left(b^2p+bpq+aq^2\right)-\left(a^2q+apq+bp^2\right) = g(p)$ とおくと，

$g(0) = ab^2 - a^2b = ab(b-a) < 0$

$g\left(\dfrac{b}{2}\right) = b^2\left(\dfrac{b}{2}\right) - b\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{b^3}{4} > 0$

であるから，中間値の定理より $g(p) = 0,\ 0 < p < \dfrac{b}{2}$ を満たす p が存在する。

（ⅱ）$a = b$ のとき

$p = q$ とすると $V_x = V_y$ であるから②が成り立つ。

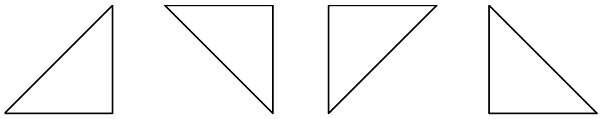
（ⅲ）$a < b$ のとき

（ⅰ）と同様に②が成り立つことが示される。

よって，(1)，(2)，(3)を満たす関数 $f(x)$ が存在する。

[東京工業大学 2007 年 第１類ＡＯ型 $\boxed{4}$]

直角二等辺三角形の板が机の上に, 長さが等しい辺の一方が真横になっているように置かれているものとする。つまり，右の 4 種類の置き方があることになる。



置き方：A_0　置き方：A_1　置き方：A_2　置き方：A_3

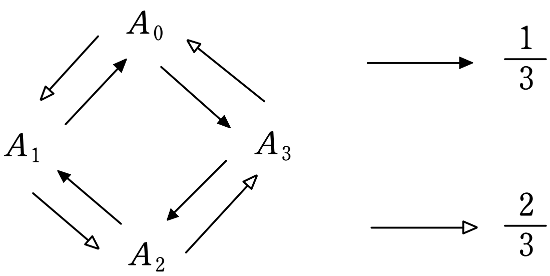
正確なサイコロを用意し，そのサイコロを振って出た目に従い板の置き方を変えていくことにする。1 か 2 の目が出れば，上下対称の置き方に，3 か 4 の目が出れば，左右対称の置き方に，5 か 6 の目が出れば，反時計回りに90°回転させた置き方に，置き直す。

例えば，1 の目が出れば，A_1 を A_0 に，3 の目が出れば，A_2 を A_1 に，5 の目が出れば，A_2 を A_3 に変える。

このような操作を n 回繰り返したとき，X の置き方が Y の置き方に変わる確率を $P_n(X, Y)$ と書くことにする。ここで，X, Y は A_0, A_1, A_2, A_3 のいずれかとする。

このとき，$P_n(A_0, A_0)$, $P_n(A_0, A_1)$, $P_n(A_0, A_2)$, $P_n(A_0, A_3)$ の値を求めよ。

板の置き方は次の図のように推移する。



最初の置き方が A_0 であるとすると,

$2m \quad (m=0, 1, \cdots)$ 回後の置き方は A_0 か A_2，$2m+1$ 回後の置き方は A_1 か A_3 …①である。

$P_n\left(A_0, A_0\right)=a_n$，$P_n\left(A_0, A_1\right)=b_n$ とおくと,

$P_{2m}\left(A_0, A_2\right)=1-a_{2m}$，$P_{2m+1}\left(A_0, A_3\right)=1-b_{2m+1}$ …②

であるから $b_{2m+1}=\frac{2}{3}a_{2m}+\frac{1}{3}\left(1-a_{2m}\right)=\frac{1}{3}a_{2m}+\frac{1}{3}$

$$a_{2m+2}=\frac{1}{3}b_{2m+1}+\frac{2}{3}\left(1-b_{2m+1}\right)=-\frac{1}{3}b_{2m+1}+\frac{2}{3}$$ が成り立つ。

よって，$a_{2m+2}=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}a_{2m}+\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{9}a_{2m}+\dfrac{5}{9}$

$$a_{2m+2}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{9}\left(a_{2m}-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{9}\right)^{2}\left(a_{2m-2}-\frac{1}{2}\right)=\cdots=\left(-\frac{1}{9}\right)^{m+1}\left(a_0-\frac{1}{2}\right)$$

であり，$a_0=1$ より

$a_{2m+2}=\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{m+1}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$ より $a_{2m}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{m}$

したがって $b_{2m+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{m}$ となる。

①，②より

n が偶数のとき $P_n(A_0,\ A_0)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$

$$P_n(A_0,\ A_2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$P_n(A_0,\ A_1)=P_n(A_0,\ A_3)=0$$

n が奇数のとき $P_n(A_0,\ A_0)=P_n(A_0,\ A_2)=0$

$$P_n(A_0,\ A_1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$P_n(A_0,\ A_3)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

となる。