[東京工業大学 2007 年 第１類ＡＯ型 $\boxed{1}$]

☆ ☆

この試験は現時点での諸君の論理的理解力の習熟度を測るためのものであり，あまりに乱暴な字ではその役に立ちません。できるだけ丁寧な字で，採点員が論理を追い易いように各自工夫し，結論をはっきりと記述して下さい。

整数 $m=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，実数 x の関数 $g_m(x)$ を $g_m(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2m}\,d\theta$ と定める。$g_m(x)$ の最小値を a_m，最大値を b_m とするとき，極限値 $\lim_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{b_m}$ を求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 2007 年 第１類ＡＯ型 $\boxed{2}$]

☆ ☆

一辺の長さが 10mの正方形のプールの一つの角に監視員を置く。この監視員は水中は秒速 1mでプールの縁上は秒速 2mで移動するとする。この監視員がこのプールのどこへでも到達しうるには，最短で何秒必要か計算せよ。ただし，物事を単純化するため，（ｉ）監視員は点，プールの縁は線と考え，（ⅱ）プールの縁上でも水中でもどの方向に曲ることも自由自在で，それぞれでの秒速は一定だとする。

☆ ☆

[東京工業大学 2007 年 第１類ＡＯ型 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

正の実数 $a,\ b$ に対して，以下の条件(1)，(2)，(3)を満たす関数 $f(x)$ が存在することを証明せよ。

(1) $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq a$ における連続な実数値関数で， $f(0)=b,\ f(a)=0$ を満たす。

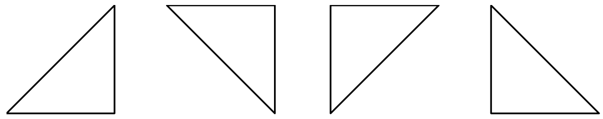
(2) $0 \leqq x_1 < x_2 \leqq a$ なるすべての $x_1,\ x_2$ に対して $f(x_1) > f(x_2)$ である。

(3) $y=f(x)$ のグラフと x 軸， y 軸とで囲まれる部分を， x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V_x と y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V_y とは等しい。

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

[東京工業大学 2007 年 第１類ＡＯ型 $\boxed{4}$]

直角二等辺三角形の板が机の上に, 長さが等しい辺の一方が真横になっているように置かれているものとする。つまり，右の 4 種類の置き方があることになる。



置き方 : A_0　置き方 : A_1　置き方 : A_2　置き方 : A_3

正確なサイコロを用意し，そのサイコロを振って出た目に従い板の置き方を変えていくことにする。1 か 2 の目が出れば，上下対称の置き方に，3 か 4 の目が出れば，左右対称の置き方に，5 か 6 の目が出れば，反時計回りに90°回転させた置き方に，置き直す。

例えば，1 の目が出れば，A_1 を A_0 に，3 の目が出れば，A_2 を A_1 に，5 の目が出れば，A_2 を A_3 に変える。

このような操作を n 回繰り返したとき，X の置き方が Y の置き方に変わる確率を $P_n(X, Y)$ と書くことにする。ここで，X, Y は A_0, A_1, A_2, A_3 のいずれかとする。

このとき，$P_n(A_0, A_0)$, $P_n(A_0, A_1)$, $P_n(A_0, A_2)$, $P_n(A_0, A_3)$ の値を求めよ。