[東京工業大学 2007 年 第１類ＡＯ型 $\boxed{3}$]

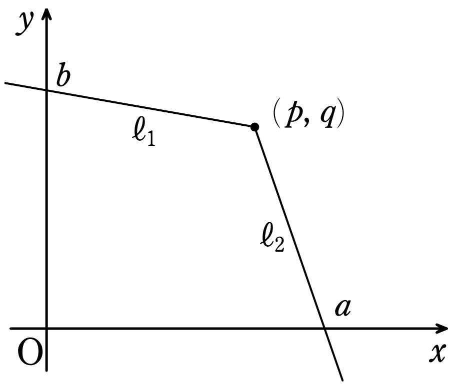
正の実数 $a,\ b$ に対して，以下の条件(1)，(2)，(3)を満たす関数 $f(x)$ が存在することを証明せよ。

(1) $f(x)$ は $0 \leqq x \leqq a$ における連続な実数値関数で， $f(0)=b,\ f(a)=0$ を満たす。

(2) $0 \leqq x_1 < x_2 \leqq a$ なるすべての $x_1,\ x_2$ に対して $f(x_1) > f(x_2)$ である。

(3) $y=f(x)$ のグラフと x 軸， y 軸とで囲まれる部分を， x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V_x と y 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V_y とは等しい。

正の実数 $p,\ q$ （$0<p<a,\ 0<q<b \cdots$①）に対し， $f(x)$ を次のように定める。



$x \leqq p$ のとき $\ell_1 : f(x) = -\dfrac{b-q}{p}x+b$

$x > p$ のとき $\ell_2 : f(x) = -\dfrac{q}{a-p}(x-a)$

このとき， $f(x)$ は(1)，(2)を満たす。

次に，(3)かつ①を満たす $p,\ q$ が存在すること …② を示す。

$$V_x = \int_0^p \pi\left(-\frac{b-q}{p}x+b\right)^2 dx + \frac{\pi q^2(a-p)}{3}$$

$$= \left[-\frac{\pi p}{3(b-q)}\left(-\frac{b-q}{p}x+b\right)^3\right]_0^p + \frac{\pi q^2(a-p)}{3}$$

$$= \frac{\pi p(b^3-q^3)}{3(b-q)} + \frac{\pi q^2(a-p)}{3}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left\{p\left(b^2+bq+q^2\right)+q^2\left(a-p\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(b^2p+bpq+aq^2\right)$$

V_y は a と b， p と q を入れ替えて $V_y = \dfrac{\pi}{3}\left(a^2q+apq+bp^2\right)$

（ｉ） $a>b$ のとき

$q=-2p+b,\ 0<p<\dfrac{b}{2}$ とすれば，①を満たす。

さらに $\dfrac{3}{\pi}\left(V_x-V_y\right) = \left(b^2p+bpq+aq^2\right)-\left(a^2q+apq+bp^2\right)=g(p)$ とおくと，

$$g(0) = ab^2 - a^2 b = ab(b-a) < 0$$

$$g\left(\frac{b}{2}\right) = b^2\left(\frac{b}{2}\right) - b\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^3}{4} > 0$$

であるから，中間値の定理より $g(p) = 0,\ 0 < p < \dfrac{b}{2}$ を満たす p が存在する。

（ⅱ） $a = b$ のとき

$p = q$ とすると $V_x = V_y$ であるから②が成り立つ。

（ⅲ） $a < b$ のとき

（ⅰ）と同様に②が成り立つことが示される。

よって，(1)，(2)，(3)を満たす関数 $f(x)$ が存在する。