[**東京工業大学 2007 年 第１類ＡＯ型 $\boxed{2}$**]

一辺の長さが 10mの正方形のプールの一つの角に監視員を置く。この監視員は水中は秒速 1mでプールの縁上は秒速 2mで移動するとする。この監視員がこのプールのどこへでも到達しうるには，最短で何秒必要か計算せよ。ただし，物事を単純化するため，（ｉ）監視員は点，プールの縁は線と考え，（ⅱ）プールの縁上でも水中でもどの方向に曲ることも自由自在で，それぞれでの秒速は一定だとする。

図１のように，プールに座標を設定する。

点 O に監視員をおく。各点までの所要時間が最小になる場合を考えるので，水中では直進する。

図1

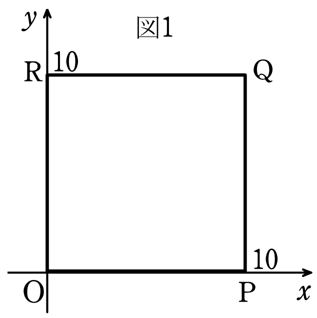
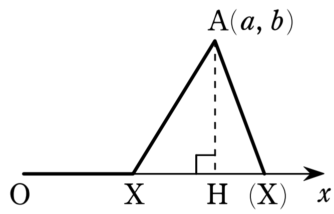


図2



まず，図 2 のように，点 O から x 軸上の点 X を経由して，水中の点 A$(a,\ b)$ へ至る所要時間が最小になる X を考える。

X が H より右側にあるとき，所要時間に関して $\underbrace{\dfrac{\mathrm{OX}}{2}+\mathrm{XA}}_{\mathrm{O\to X\to A}} \geqq \underbrace{\dfrac{\mathrm{OH}}{2}+\mathrm{HA}}_{\mathrm{O\to H\to A}}$ が成り立つので，

X は H の左側にある。

$\mathrm{XH}=s\ \ (0\leqq s\leqq a)$ とおくと，所要時間は $\dfrac{a-s}{2}+\sqrt{s^2+b^2}$ となり，これを $f(s)$ とすると

$f'(s)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{s}{\sqrt{s^2+b^2}}$ となる。

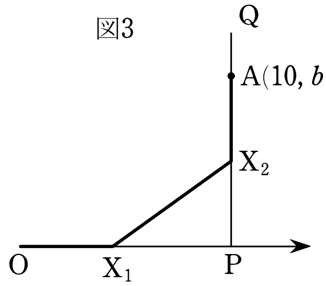
$f'(s)<0 \iff \dfrac{s}{\sqrt{s^2+b^2}}<\dfrac{1}{2} \iff \sqrt{s^2+b^2}>2s\ \ (\geqq 0) \iff s^2+b^2>4s^2 \iff b^2>3s^2$

であるから，$f(s)$ は $(0\leqq)\,s<\dfrac{b}{\sqrt{3}}$ のとき減少，$s>\dfrac{b}{\sqrt{3}}$ のとき増加する。

よって $f(s)$ が最小になるのは $s=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$ のときで，このとき $\angle\mathrm{OXA}=120^\circ$ である。

次に，図 3 のように，点Oから縁上の点X_1, X_2を経由して$A(10, b)$へ至る所要時間が最小になるX_1, X_2を考える。

図3



$PX_1 = s,\ PX_2 = t \quad (0 \leqq s \leqq 10,\ 0 \leqq t \leqq b)$ とおく。

tを固定すると，所要時間が最小になるのは $s = \dfrac{t}{\sqrt{3}}$ のときである。

このとき，所要時間は $\dfrac{1}{2}\left(10 - \dfrac{t}{\sqrt{3}} + b - t\right) + \dfrac{2t}{\sqrt{3}} = \dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)t + 10 + b}{2}$

であるから，$t = 0 \ \left(X_1 = X_2 = P\right)$ のとき最小。

以上より，点Oから点$A(a, b)$へ至る所要時間が最小になる経路は図 4 か図 5 のどちらか。

図4

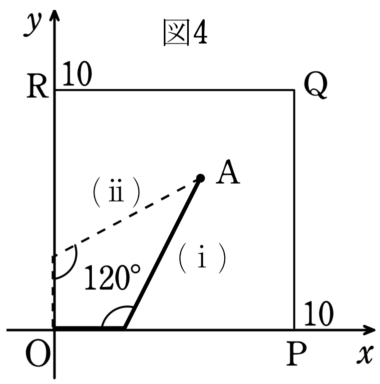
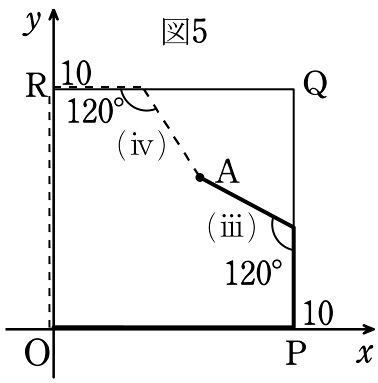


図5



所要時間は，$y = x$に関する対称性に注意して

（ⅰ）$\dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{b}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{2b}{\sqrt{3}} = \dfrac{a + \sqrt{3}b}{2}$

（ⅱ）$\dfrac{1}{2}\left(10 + b - \dfrac{10-a}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{2(10-a)}{\sqrt{3}} = \dfrac{b - \sqrt{3}a}{\sqrt{3}} + 5 + 5\sqrt{3}$

（ⅲ）$\dfrac{b + \sqrt{3}a}{2}$

（ⅳ）$\dfrac{a - \sqrt{3}b}{2} + 5 + 5\sqrt{3}$

となる。

いま，A は $x \geqq y$ の範囲にある（$a \geqq b$）としてよい。このとき，(ⅰ)≦(ⅱ)，(ⅲ)≦(ⅳ) であるから(ⅰ)，(ⅲ)の場合について考える。

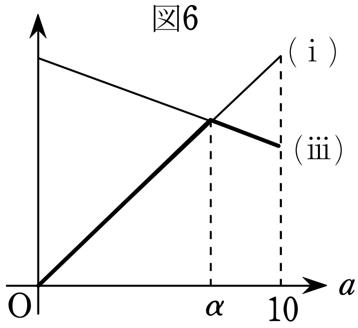
a を固定すると，(ⅰ)，(ⅲ)はどちらも $b=a$ のときに最大になるので，A が $y=x$ 上にある場合（$a=b$）を考えればよい。よって，$a=b$ とし，$0 \leqq a \leqq 10$ で a を動かしたとき，(ⅰ)と(ⅲ)の小さい方の最大値が答えである。

(ⅰ)$=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}a$

(ⅲ)$=\dfrac{1-\sqrt{3}a}{2}+5\left(1+\sqrt{3}\right)$

をグラフに描くと，図 6 のようになる。

図6



$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{1-\sqrt{3}a}{2}+5\left(1+\sqrt{3}\right)$ より $a=\dfrac{5\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}=\alpha$ であるから

求める最短時間は $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{5\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}=5+\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ （秒）